スファレロン過程とレプトン数生成

船久保 公一

佐賀大学理工学部

佐賀大学高等教育開発センター

埼玉大学

素粒子論研究室セミナー

2009年6月19日

内容

1. Introduction

宇宙のバリオン数

Baryon Asymmetry of the Universe

- 地球、月、太陽、太陽系の安定性
- 天の川銀河系内からの宇宙線 $\dfrac{n_{\bar{p}}}{n_p} \sim 10^{-4}$ — 2次粒子
- 安定な銀河団 $\sim 10^{12} M_\odot$

バリオン対称宇宙で、$10^{12} M_\odot$程度の物質または反物質だけの質量を集めるのは不可能

[Steigman, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 14 ('76)]

宇宙論的観測 — CMB揺らぎのパワースペクトル & ビッグバン元素合成

$$\boxed{4.7 \times 10^{-10} \leq \eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \leq 6.5 \times 10^{-10}} \qquad (95\%\ \mathrm{CL})$$

$T < 1$MeVでは宇宙膨張で不変

現在の宇宙を説明するには、

$$\frac{n_B}{s} = (0.67 - 0.92) \times 10^{-10}$$

だけの、バリオン数が必要

$s \simeq 7.04 n_\gamma$ at $T < 1$MeV

- 宇宙の初期条件 $\longrightarrow$ 問題の先送り, 解決ではない!
- **宇宙は$B = 0$から始まって、元素合成までに生成された**

素粒子理論に基づいて定量的に説明する

標準理論では説明不可能[後述]

$\Downarrow$

標準理論を超える理論への制限

バリオン数生成のための条件 $=$ Saharovの3条件

(1) **バリオン数非保存**

(2) C **と** CP**対称性の破れ**

(3) **平衡からのズレ**

(1)は自明。

(3)が無いと、$\Delta B \neq 0$の過程と逆過程が同じ頻度で起こる。

(2)が成り立たないとすると...

宇宙のバリオン数の時間発展を考える。

▷ 宇宙の状態をdensity opertor $\rho(t)$で表す。

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)| \quad \longrightarrow \text{期待値: } \langle\mathcal{O}\rangle(t) = \mathrm{Tr}\left[\rho(t)\mathcal{O}\right]$$

▷ 初期状態ρ_0はバリオン対称 $\quad \langle n_B\rangle_0 \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_0\, n_B\right] = 0$

▷ density operator $\rho(t)$の時間発展はLiouville方程式

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+[\rho(t),H]=0$$

で決まる。形式解はHと初期条件ρ_0で書かれている。

▷ HがC対称またはCP対称 $\Longrightarrow [\rho,\mathcal{C}]=0 \quad or \quad [\rho,\mathcal{CP}]=0$

▷ 一方、 $\mathcal{C}B\mathcal{C}^{-1}=-B,\ \mathcal{CP}B(\mathcal{CP})^{-1}=-B$ (Bはvectorlikeで、Cの下でodd)

B-対称な宇宙(ρ_0)からスタートして、HがCまたはCP対称ならば、 その後の$\langle n_B\rangle$は

$$\begin{cases}\langle n_B\rangle=\mathrm{Tr}[\rho\, n_B]=\mathrm{Tr}[\rho\,\mathcal{C}n_B\mathcal{C}^{-1}]=-\mathrm{Tr}[\rho\, n_B]=0\\ \quad\mathrm{or}\\ \langle n_B\rangle=\mathrm{Tr}[\rho\,\mathcal{CP}n_B(\mathcal{CP})^{-1}]=-\mathrm{Tr}[\rho\, n_B]=0\end{cases}$$

$\therefore$ $\boxed{\langle n_B\rangle\neq 0\text{となるには、 }C\text{ と }CP\text{ の両方が破れなければならない。}}$

Baryogenesisの可能性

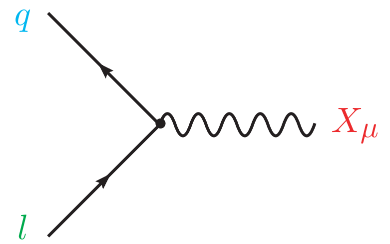
(1) バリオン数非保存

バリオン数を破る相互作用 — 標準理論の*tree-level*には無い　global $U(1)_B$-sym.

▷ 拡張した理論におけるバリオン数保存の破れ

- GUTs — 標準理論のゲージ群$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$の統一

⟶ クォークとレプトンが**同じ多重項**



- 超対称理論 — バリオン数を持ったスカラー場がある時期に期待値を持つ

‖

クォークのsuperpartner: スカラー・クォーク (squark)　$\tilde{q}$

Affleck-Dine mechanism

[Affleck & Dine, Nucl. Phys. B249 ('85); Dine, et al., Nucl. Phys. B458 ('96)]

- 他の可能性?

▷ 標準理論にある**量子効果による**バリオン数保存の破れ [次節のテーマ]

‖

$(B+L)$カレントのアノマリ (chiral anomaly)

バリオン数非保存に対する制限 = $\boxed{\text{陽子崩壊 } \tau_p > 10^{31}\mathrm{y}}$

⟶ 例えば、最も簡単な $SU(5)$ GUT は除外される

標準理論の$(B+L)$カレントのアノマリによる$\Delta B \neq 0$過程は?

⟶ $T=0$では確率が殆どゼロ ['t Hooft, Phys. Rev. D14 ('76)]

しかし、高温では頻繁に起こるという好ましい性質

(2) CとCP対称性の破れ

⋆ C対称性 ← カイラル・ゲージ相互作用 (∈ 電弱理論、それを含むGUTs)

$\mathcal{L} \sim g\left(\bar{\psi}_L \gamma^\mu A_\mu^a T_L^a \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu A_\mu^a T_R^a \psi_R\right)$ において $T_L^a \neq T_R^a$

例) 標準理論のquark, leptonに対して、 $T_L^a = \frac{\tau^a}{2}$ and $T_R^a = 0$ and $Y_L \neq Y_R$

⋆ CP対称性

- 標準理論: 小林-益川行列に含まれる複素位相 $y_{AB}\bar{q}_{AL}\gamma^\mu W_\mu^- q_{BL}$ + h.c. $(A \neq B)$

  strong CP phase $(\sim \theta_{\rm QCD} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})$ $\theta_{\rm QCD} \simeq 0$ by nEDM実験

- 標準理論の拡張 — 繰り込み可能なCPを破る演算子は限られる

例) 超対称標準理論

superpotenialの複素パラメータ (μなど)

soft SUSY-breaking parameters (質量次元3以下)

$\mu B \Phi_d \Phi_u,\ A\phi^3,\ M\chi\chi$ [Girardello & Grisaru, Nucl. Phys. B194 ('82)]

独立はCP位相は、これらの組み合わせ

(3) 非平衡状態

- 宇宙の膨張　$\Gamma_{\Delta B \neq 0} \simeq H(T)$
- インフレーション直後のReheatingまたはPreheating

  — 粒子生成とエントロピー生成
- 一次相転移 — 相境界面の形成と成長

1つの具体例 — GUT Baryogenesis

[Yoshimura, Phys. Rev. Lett. 41 ('78)]

minimal $SU(5)$ model:

matter: $\begin{cases} 5^* : \psi^i_L & \ni \quad d^c_R, l_L \\ 10 : \chi_{[ij]L} & \ni \quad q_L, u^c_R, e^c_R \end{cases}$ gauge: $A_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu, B_\mu & X^{a\alpha}_\mu \\ X^{a\alpha}_\mu & W_\mu, B_\mu \end{pmatrix}$

$i = 1 - 5 \ \longrightarrow (\alpha = 1 - 3, a = 1, 2)$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \ni g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi + g\mathrm{Tr}\left[\bar{\chi}\gamma^\mu\{A_\mu, \chi\}\right]$$

$$\ni gX^a_{\alpha\mu}\left[\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{u}^c_{R\gamma}\gamma^\mu q_{L\beta a} + \epsilon_{ab}\left(\bar{q}^\alpha_{Lb}\gamma^\mu e^c_R + \bar{l}_{Lb}\gamma^\mu d^{c\alpha}_R\right)\right]$$

熱浴から生成されたX-$\bar{X}$対の崩壊での
バリオン数変化の期待値

$$\langle \Delta B \rangle = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}(1 - r) - \frac{2}{3}\bar{r} + \frac{1}{3}(1 - \bar{r}) = r - \bar{r}$$

過程	分岐比	ΔB
$X \longrightarrow qq$	r	$2/3$
$X \longrightarrow \bar{q}\bar{l}$	$1 - r$	$-1/3$
$\bar{X} \longrightarrow \bar{q}\bar{q}$	$\bar{r}$	$-2/3$
$\bar{X} \longrightarrow q, l$	$1 - \bar{r}$	$1/3$

$\therefore$ C または CP が保存されるなら ($r = \bar{r}$)

$\Longrightarrow \Delta B = 0$

逆過程がsuppressされるならば、$B \propto r - \bar{r}$ が生成される。

実際、 $T \simeq m_X$では、Xの崩壊率: $\Gamma_D \simeq \alpha m_X$ $(\alpha \sim 1/40)$

$\rightarrow \Gamma_D \simeq H(T = m_X)$なので、$X\bar{X}$対の生成・消滅は平衡から外れる。

$$H(T) \simeq 1.66\sqrt{g_*}\frac{T^2}{m_{\mathrm{Pl}}}$$

g_*:有効massless自由度

$SU(5)$ modelは$(B-L)$を保存 — $(B+L)$を生成

$\longrightarrow$ アノマリによる$\Delta(B+L) \neq 0$過程が平衡になると $B+L \rightarrow 0$ [後述]

$\Downarrow$

baryogenesisの新しい可能性

$\Delta(B+L) \neq 0$過程が平衡になる前に□$B-L \neq 0$を生成しておけばよい。

Leptogenesis: $\Delta L \neq 0 \rightarrow B = -L$

2. Anomalous Baryon Number Nonconservation

電弱理論のB, Lカレントのアノマリ

$$\partial_\mu j^\mu_{B+L} = \frac{N_f}{16\pi^2}[g_2^2 \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) - g_1^2 B_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu}]$$

$$\partial_\mu j^\mu_{B-L} = 0$$

N_f =世代数

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

これらの式の和を積分して

$$\begin{aligned} B(t_f) - B(t_i) &= \frac{N_f}{32\pi^2}\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[g_2^2 \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) - g_1^2 B_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu}\right] \\ &= N_f \left[N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i)\right] \end{aligned}$$

ここで N_{CS} は Chern-Simons number: $A_0 = 0$-gaugeでは

$$N_{CS}(t) = \frac{1}{32\pi^2}\int d^3x\, \epsilon_{ijk}\left[g_2^2 \mathrm{Tr}\left(F_{ij}A_k - \frac{2}{3}g_2 A_i A_j A_k\right) - g_1^2 B_{ij}B_k\right]_t$$

gauge系の**古典的真空**：$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) = 0 \Longleftrightarrow F_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = 0$

$\Longleftrightarrow A_\mu = iU^{-1}\partial_\mu U$, $B_\mu = \partial_\mu v$ with $U \in SU(2)$ $\quad U(\boldsymbol{x}) : S^3 \to U \in SU(2) \simeq S^3$

$\pi_3(S^3) \simeq \mathrm{Z} \Longrightarrow U(\boldsymbol{x})$ は整数N_{CS}で分類される

$\frac{ig_2^3}{48\pi^2}\int d^3x\, \epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}[U^{-1}\partial_i U\, U^{-1}\partial_j U\, U^{-1}\partial_k U]$ が整数のwinding number

２次元$U(1)$ゲージ理論の例:

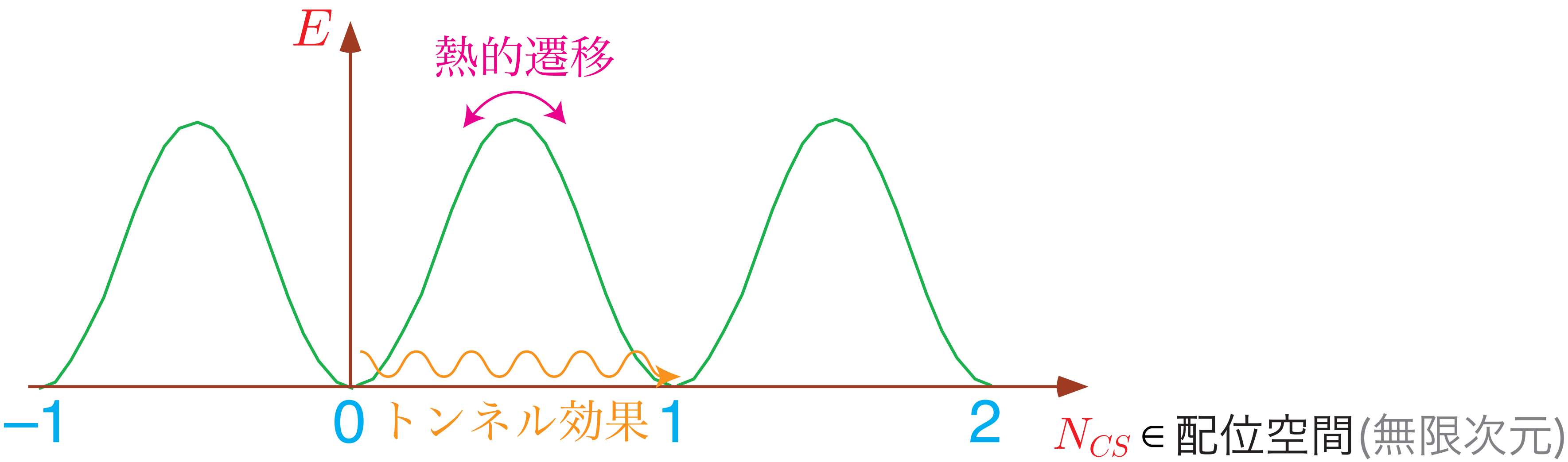
axial $U(1)$ anomaly $\rightarrow$ axial fermion数の変化

$$\Delta Q_5 = \frac{g}{4\pi}\int_{t_i}^{t_f} dt\, dx\, \epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i),$$

$$N_{CS}(t) = \frac{g}{2\pi}\int dx\, A_1(t,x).$$

真空配位: $A_1(x) = \frac{1}{g}\partial_x \alpha(x)$ with $\alpha(\infty) - \alpha(-\infty) = 2\pi N$

$$\therefore\ N_{CS} = N$$



$\Delta B \neq 0$過程
- ▷ 量子トンネル効果　　低温
- ▷ 熱的遷移　　高温

トンネル確率 $\sim e^{-2S_{\text{instanton}}} = e^{-8\pi^2/g_2^2} \simeq e^{-164} \ll 1$　　∴ 陽子崩壊の問題なし

熱的遷移確率 $\sim e^{-E_{\text{sph}}/T}$

E_{sph} = Sphaleronという場の古典解のエネルギー

$T > T_C$ではsphaleron解は存在しないが，慣例的に

anomalyによる$\Delta(B+L) \neq 0$過程を **スファレロン過程** という。

N_{CS}の変化とフェルミオン数

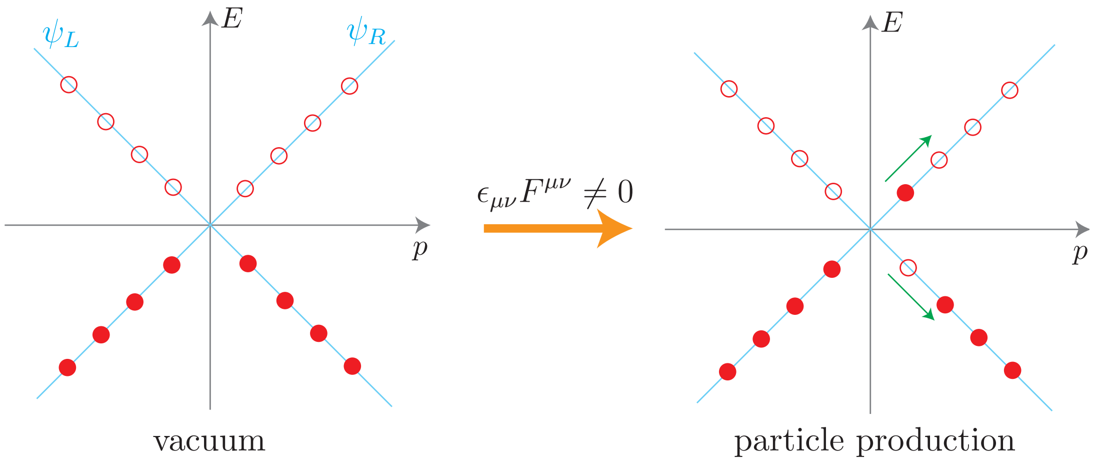
古典的場の配位が変化する際のフェルミオン数の変化

- index定理 [Atiyah and Singer, 1968]

$$n_R - n_L = \nu = \frac{g^2}{16\pi}\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})$$

Δ(chiral fermions) = Pontrjagin index = instanton number

- spectral flow (level crossing) [Ambjørn, et al. Nucl. Phys. B221 ('83)]



断熱的にgauge場をon-off

▷ $(1+1)$次元の例

Dirac eq. $\boxed{i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu(x))\psi(x) = 0}$ $\quad [\gamma^0 = \sigma_1,\ \gamma^1 = i\sigma_2;\quad \gamma_3 = \gamma^0\gamma^1 = -\sigma_3]$

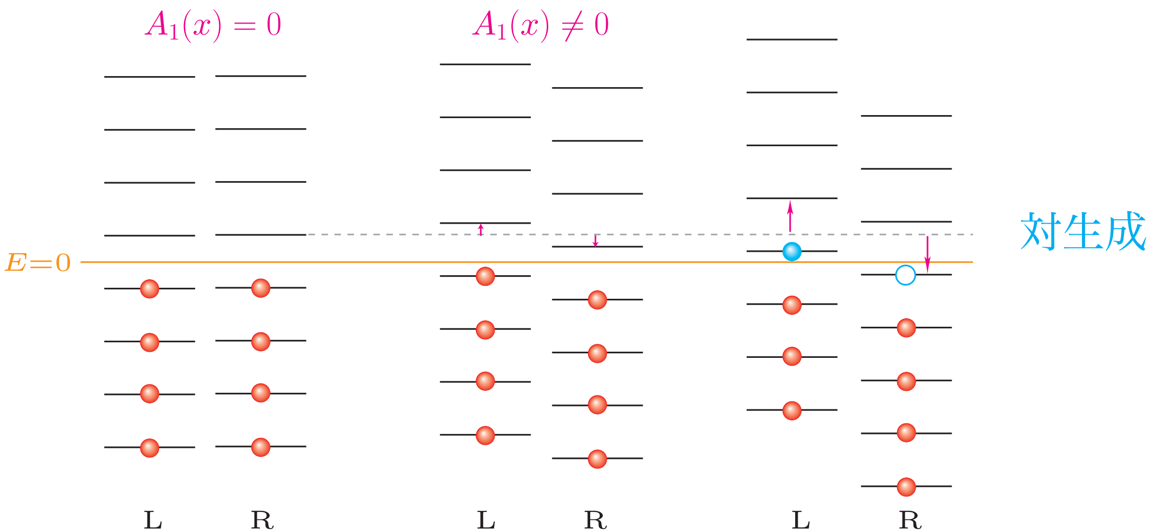
$$\xrightarrow{A_0=0} i\partial_t\psi(x) = \boldsymbol{H}\psi(x) \equiv i\sigma_3\left(\partial_x - igA_1(x)\right)\psi(x) = \begin{cases} i(\partial_x - igA_1(x))\psi_L(x) \\ -i(\partial_x - igA_1(x))\psi_R(x) \end{cases}$$

周期的境界条件: $\psi(x+L) = \psi(x)$

t-indep. gauge trf. $\tilde\psi(x) = \exp\left(ig\int_0^x dx'\, A_1(x)\right)\psi(x)$

$\longrightarrow \boldsymbol{H}\tilde\psi(x) = i\sigma_3\partial_x\tilde\psi(x)$ with $\tilde\psi(x+L) = e^{ig\int_0^L dx\, A_1(x)}\psi(x+L) = e^{i\alpha L}\tilde\psi(x)$

$\Rightarrow \tilde\psi(x) = e^{ipx}$ with $p = \dfrac{2\pi n}{L} + \alpha\ (n \in \mathrm{Z})$ $\qquad \begin{cases} \boldsymbol{H}\tilde\psi_L(x) = +p\,\tilde\psi(x) \\ \boldsymbol{H}\tilde\psi_R(x) = -p\,\tilde\psi(x) \end{cases}$



$\alpha \to \dfrac{2\pi}{L}$: 真空に戻る

3. Sphaleron Process

Sphaleron 語源: $\sigma\varphi\alpha\lambda\epsilon\rho os$ = ready-to-fall, deceitful (偽りの)

[cf. a·sphalt] [Klinkhamer and Manton, Phys. Rev. D30 ('84)]

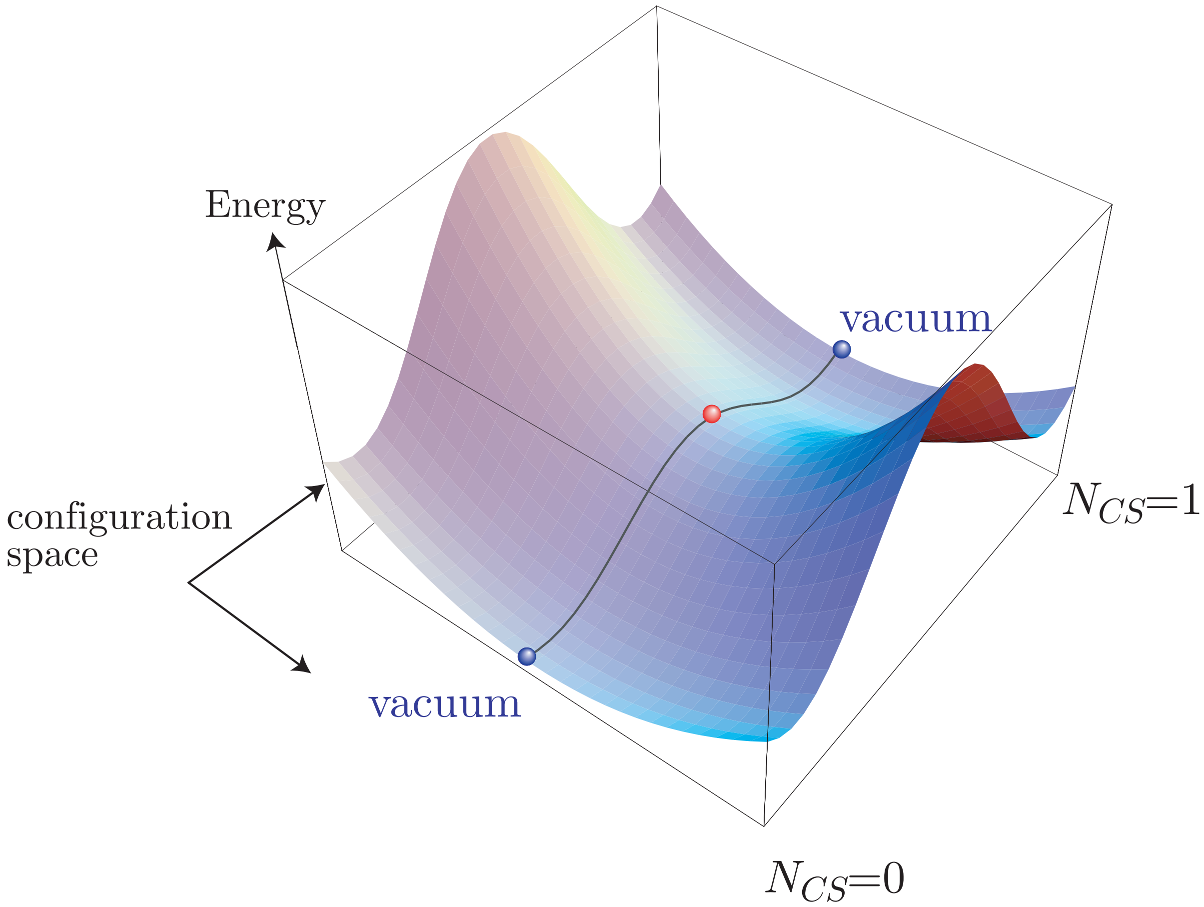
▷ 場の理論の静的古典解 (有限エネルギー)

▷ 不安定 — 古典解の周りの揺らぎのスペクトルに 1 個の負モード

既知のSphaleron解

4-dim. SU(2) gauge + 1-doublet Higgs	[Klinkhamer and Manton, Phys. Rev. D30 ('84)]
2-dim. $U(1)$ gauge-Higgs model	[Bocharev and Shaposhnikov, Mod. Phys. Lett. A2 ('87)]
2-dim. $O(3)$ nonlinear sigma model	[Mottola and Wipf, Phys. Rev. D39 ('89)]
2-Higgs-Doublet Model	[Kastening, Peccei and Zhang, Phys. Lett. B266 ('91)]
MSSM with $V_{\rm eff}(T)$	[Moreno, Oaknin and Quiros, Nucl. Phys. B483 ('97)]
	[KF and Senaha, hep-ph/0905.2022]
Next-to-MSSM	[KF, Kakuto, Tao and Toyoda, Prog. Theor. Phys. 114 ('05)

鞍点(saddle point) = least-energy path上のmaximum-energy configuration



least-energy path/gauge trf. = noncontractible loop

$\updownarrow$

highest symmetry config.

[Manton, Phys. Rev. D28 ('83)]

バリオン数変化率 — [1/volume/time]

4次元$SU(2)$gauge-Higgs系(1-doublet) [Arnold and McLerran, Phys. Rev. D36 ('87)]

⋆ broken phase — WKB approx. of $\mathrm{Im}F(T)$

$$\boxed{\Gamma_{\rm sph}^{(b)}(T) \simeq k\,\mathcal{N}_{\rm tr}\,\mathcal{N}_{\rm rot}\,\frac{\omega_-}{2\pi}\left(\frac{\alpha_W(T)T}{4\pi}\right)^3 e^{-E_{\rm sph}/T}}$$

zero modes: $\mathcal{N}_{\rm tr} = 26, \quad \mathcal{N}_{\rm rot} = 5.3 \times 10^3$ for $\lambda = g^2$

negative mode: $\omega_-^2 \simeq (1.8 \sim 6.6)m_W^2$ for $10^{-2} \leq \lambda/g^2 \leq 10$

$$k \simeq O(1)$$

⋆ symmetric phase — 次元解析

$$\boxed{\Gamma_{\rm sph}^{(s)}(T) \simeq \kappa(\alpha_W T)^4}$$

MC simulation $\Rightarrow \langle N_{CS}(t)N_{CS}(0)\rangle \sim \langle N_{CS}\rangle^2 + Ae^{-\Gamma V t}$

$\kappa = 1.09 \pm 0.04$ $SU(2)$ pure gauge系 [Ambjørn and Krasnitz, P.L.B362('95)]

平衡スファレロン過程と量子数

統計力学の復習

平衡系の統計力学が使える条件: 宇宙の膨張率 $\boxed{H(t) < \Gamma(T)}$ 粒子の反応率

一種の自由粒子(自由度$= g$)について、 $(k_B = 1)$

自由エネルギー密度: $f = \dfrac{F}{V} = \pm g\, T \displaystyle\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \log\left[1 \mp e^{-(\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\mu)/T}\right]$

エネルギー密度: $\epsilon = g \displaystyle\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\boldsymbol{p}}}{e^{(\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\mu)/T} \mp 1}$

粒子数密度: $n = g \displaystyle\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\mu)/T} \mp 1}$

エントロピー密度: $s = -\dfrac{\partial f}{\partial T}$

$\epsilon_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $\mu =$化学ポテンシャル

上の符号がボソン, 下の符号がフェルミオン

	高温($T \gg m, \mu$)	低温($T \ll m$)
$f(=-P)$	$-g \begin{Bmatrix} 1 \\ 7/8 \end{Bmatrix} \frac{\pi^2}{90} T^4$	
ϵ	$g \begin{Bmatrix} 1 \\ 7/8 \end{Bmatrix} \frac{\pi^2}{30} T^4$	$g\, m \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T}$
n	$g \begin{Bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{Bmatrix} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$	$g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} = \frac{\epsilon}{m}$
s	$g \begin{Bmatrix} 1 \\ 7/8 \end{Bmatrix} \frac{2\pi^2}{45} T^3$	

宇宙が冷えるときの質量mの粒子

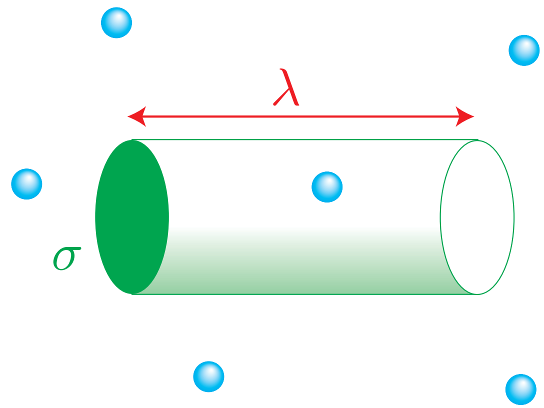
$T \gg m$: 何らかの相互作用が十分速ければ、 $n \propto T^3$ kinetic equilibrium

$T \sim m$:
- 相互作用が速ければ平衡分布をたどる $\longrightarrow$ 急激に減少 $\sim e^{-m/T}$
  — 軽い粒子にdecay
- 相互作用が遅いと平衡分布から外れる $\longrightarrow$ decay出来ずに残る

定量的解析 $=$ 分布函数に対する方程式 — **Boltzmann方程式**を解く

例) GUTバリオン数生成、レプトン数生成、ダークマター残存量

相互作用の時間スケール: $\bar{t}$　　$[T \gg m]$

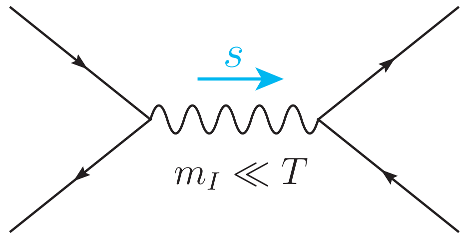


- ▷ 相対論的粒子 $\Rightarrow$ $(\text{反応率})^{-1} = \bar{t} \simeq \lambda$: mean free path
- ▷ その粒子の相互作用全断面積$= \sigma$
- ▷ 粒子数密度$= n(T) \simeq g_{*n} \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$

$$g_{*n} = \textstyle\sum_B g_B + \frac{3}{4} \sum_F g_F$$

$$\boxed{\sigma \cdot \lambda = \frac{1}{n(T)}}$$

中間状態の質量 $m_I \ll T \rightarrow \sigma \simeq \dfrac{\alpha^2}{s} \simeq \dfrac{\alpha^2}{T^2}$　　$\left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi}\right)$



$$\therefore \quad \bar{t} = \lambda \simeq \frac{10}{gT^3} \left(\frac{\alpha^2}{T^2} \right)^{-1} = \frac{10}{g\alpha^2 T}$$

放射優勢期の膨張率 $H(T) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(T)} \simeq 1.66\sqrt{g_*}\frac{T^2}{m_{\rm P}}$ $\left\{ \begin{array}{l} g_* = \text{放射自由度} \\ m_{\rm P} = 1.2 \times 10^{19}\text{GeV} \end{array} \right.$

宇宙の膨張の時間スケール $H(T)^{-1} \simeq \frac{m_{\rm P}}{1.66\sqrt{g_*}T^2}$ 10^{14}GeV^{-1} at $T = 100\text{GeV}$

素過程の時間スケール $\bar{t} \simeq \lambda = \frac{1}{\sigma n(T)} \simeq \frac{1}{\alpha^2 T}$ $1 - 10\text{GeV}^{-1}$ (strong$-$EW int.)

スファレロン過程(sym.) $\bar{t}_{\rm sph}^{\rm (sym)} \simeq \frac{1}{\alpha_W^4 T}$ 10^3GeV^{-1}

スファレロン過程(br.) $\bar{t}_{\rm sph}^{\rm (br)} \simeq \frac{1}{\alpha_W^4 T}e^{E_{\rm sph}/T}$

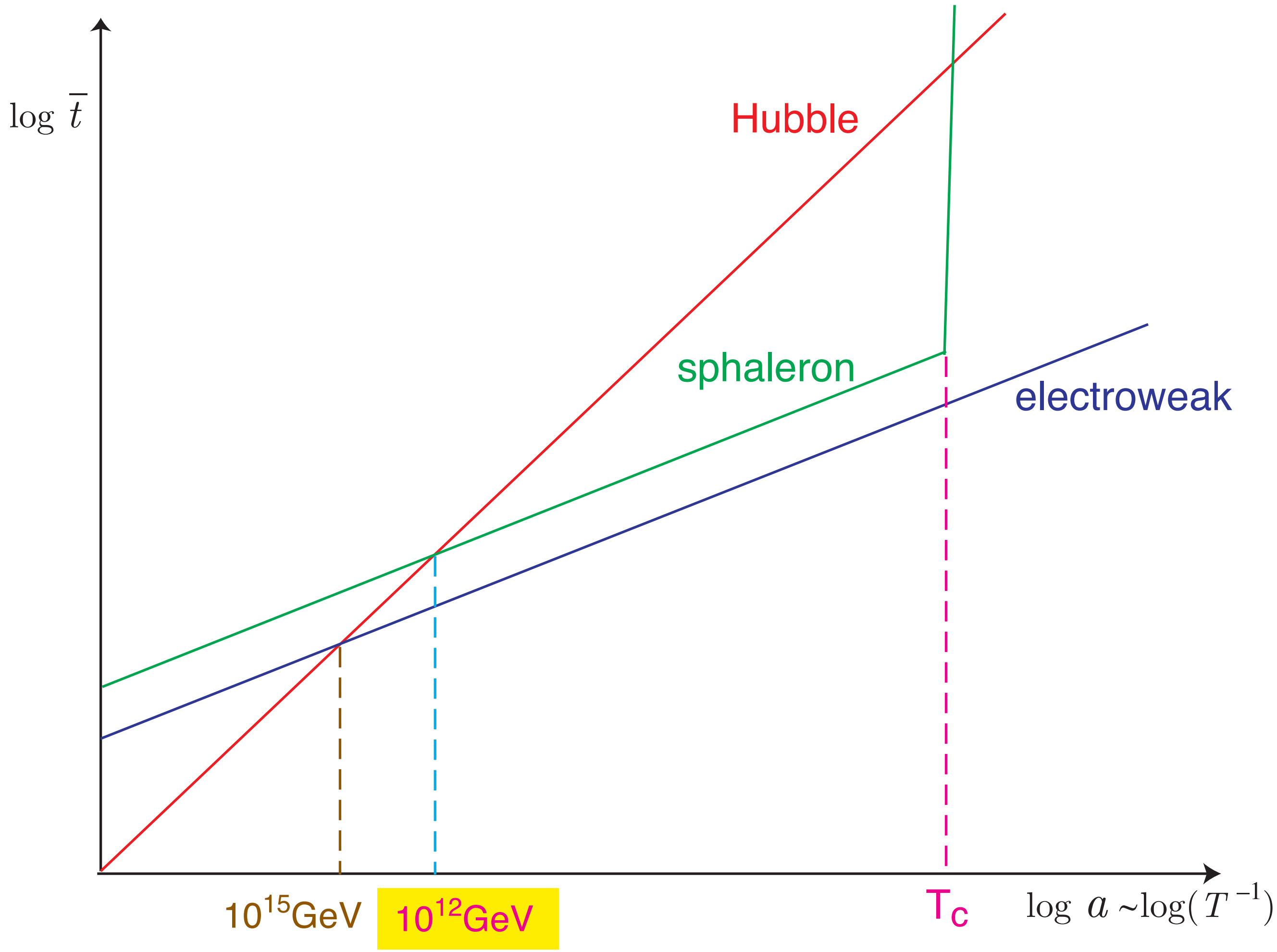
$T = T_C \simeq 100\text{GeV}$ **で電弱相転移** $= SU(2)_L \times U(1)_Y$の自発的破れ $\langle\Phi\rangle_T \neq 0$

$\star$ $T > T_C$ (対称相) $\Longrightarrow \bar{t}_{\rm QCD} < \bar{t}_{EW} < \bar{t}_{\rm sph}^{\rm (sym)} \ll H(T)^{-1}$

$\therefore$ 全てのゲージ相互作用と、スファレロン過程は化学平衡

$\star$ $T \lesssim T_C$ (非対称相) $\Longrightarrow \bar{t}_{\rm QCD} < \bar{t}_{EW} \ll H(T)^{-1}$

$\therefore$ 全てのゲージ相互作用は化学平衡



電弱相転移直後 $v(T_C) \ll 200$GeV (弱い一次、または二次転移)のとき、

$T_{\rm dec} < T < T_C \implies \bar{t}^{\rm (br)}_{\rm sph} > H(T)^{-1}$ となる$T_{\rm dec}$が存在する。

$\longrightarrow$ 非対称相でさえ、スファレロン過程は化学平衡

平衡状態での量子数 —スファレロンが化学平衡なら残る $B \propto (B-L)$

保存量 $Q_i([H, Q_i] = 0)$があるとき、分配函数: $Z(T, \mu) \equiv \mathrm{Tr}\left[e^{-(H - \sum_i \mu_i Q_i)/T}\right]$ より

$$\langle Q_i \rangle (T, \mu) = T \frac{\partial}{\partial \mu_i} \log Z(T, \mu) \qquad \longrightarrow Q_i \text{と} \mu_i \text{の関係}$$

LFVが無い電弱理論：$Q_i = B/N_f - L_i$, unbroken gauge charge

現実には$Z(T, \mu)$の計算は困難　　($\because$ 全ての場についての経路積分、非摂動効果)

$\Downarrow$

- 摂動論　[Khebnikov & Shaposhnikov, Phys. Lett. B387 ('96); Laine & Shaposhnikov, Phys. Rev. D61 ('00)]

- 自由場近似

  各粒子の化学ポテンシャルμを導入し、Q_iを粒子のμで表す。

  粒子のμには化学平衡の関係式(e.g. $\mu_A + \mu_B = \mu_C$)が成り立つ。

⋆ massless free-field approximation

$$\langle N \rangle = \langle n \rangle - \langle \bar{n} \rangle \quad = \quad \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{(\omega_k - \mu)/T} \mp 1} - \frac{1}{e^{(\omega_k + \mu)/T} \mp 1} \right]$$

$$\stackrel{m \ll T}{\simeq} \quad \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{x^2}{e^{x - \mu/T} \mp 1} - \frac{x^2}{e^{x + \mu/T} \mp 1} \right]$$

$$\stackrel{|\mu| \ll T}{\simeq} \quad \begin{cases} \dfrac{T^3}{3} \cdot \dfrac{\mu}{T}, & \text{(bosons)} \\[2ex] \dfrac{T^3}{6} \cdot \dfrac{\mu}{T}, & \text{(fermions)} \end{cases}$$

cf. $s = \dfrac{2\pi^2}{45} g_* T^3 \to \dfrac{\langle N \rangle}{s} \sim \dfrac{|\mu|}{T} \simeq 10^{-10} \ll 1$

質量の効果 $\to$ [Dreiner & Ross, Nucl. Phys. B410 ('93)]

化学ポテンシャルμと量子数密度

[Harvey & Turner, Phys. Rev. D42 ('90)]

粒子の化学ポテンシャル — N世代のフェルミオン、 N_H個のHiggs doublets $(\phi^0\,\phi^-)$

W^-	$u_{L(R)}$	$d_{L(R)}$	$e_{iL(R)}$	ν_{iL}	ϕ^0	ϕ^-
μ_W	$\mu_{u_{L(R)}}$	$\mu_{d_{L(R)}}$	$\mu_{iL(R)}$	μ_i	μ_0	μ_-

$(3N+7)\ \mu$'s

Wは横波自由度のみ, $\phi^{0,-}$はNG modeもカウント

color, charge neutrality $\to \mu_{\text{gluon}} = \mu_{Z,\gamma} = 0$

quark mixingは化学平衡, LFVは無し

化学平衡

gauge: $\mu_W = \mu_{d_L} - \mu_{u_L} = \mu_{iL} - \mu_i = \mu_- + \mu_0$ $\quad N+2$

Yukawa: $\mu_0 = \mu_{u_R} - \mu_{u_L} = \mu_{d_L} - \mu_{d_R} = \mu_{iL} - \mu_{iR}$ $\quad N+2$

$\therefore\ 3N+7-2(N+2) = N+3$ 個の独立な μ : $(\mu_W,\ \mu_0,\ \mu_{u_L},\ \mu_i)$

sphaleron process : $|0\rangle \rightleftharpoons \prod_i (u_L d_L d_L \nu_L)_i \iff N(\mu_{u_L} + 2\mu_{d_L}) + \sum_i \mu_i = 0$

量子数密度 $[T^2/6$を単位とする$]$

$$
\begin{aligned}
B &= N(\mu_{u_L}+\mu_{u_R}+\mu_{d_L}+\mu_{d_R}) = 4N\mu_{u_L}+2N\mu_W, \\
L &= \sum_i(\mu_i+\mu_{iL}+\mu_{iR}) = 3\mu+2N\mu_W-N\mu_0 \\
Q &= \frac{2}{3}N(\mu_{u_L}+\mu_{u_R})\cdot 3-\frac{1}{3}N(\mu_{d_L}+\mu_{d_R})\cdot 3-\sum_i(\mu_{iL}+\mu_{iR})-2\cdot 2\mu_W-2N_H\mu_- \\
&= 2N\mu_{u_L}-2\mu-(4N+4+2N_H)\mu_W+(4N+2N_H)\mu_0 \\
I_3 &= \frac{1}{2}N(\mu_{u_L}-\mu_{d_L})\cdot 3+\frac{1}{2}\sum_i(\mu_i-\mu_{iL})-2\cdot 2\mu_W-2\cdot\frac{1}{2}N_H(\mu_0+\mu_-) \\
&= -(2N+N_H+4)\mu_W
\end{aligned}
$$

ここで $\mu \equiv \sum_i \mu_i$ と置いた。

- $T \gtrsim T_C$ (symmetric phase)　　$Q = I_3 = 0$を要請。 ($\mu_W = 0$)

$$B = \frac{8N + 4N_H}{22N + 13N_H}(B-L), \qquad L = -\frac{14N + 9N_H}{22N + 13N_H}(B-L)$$

- $T \lesssim T_C$ (broken phase)　　$Q = 0$ and $\mu_0 = 0$ ($\because$ ϕ^0 condensates)

$$B = \frac{8N + 4(N_H+2)}{24N + 13(N_H+2)}(B-L), \qquad L = -\frac{16N + 9(N_H+2)}{24N + 13(N_H+2)}(B-L)$$

何れにせよ、$(B-L)_{\mathrm{primordial}} = 0$ ならば $B = L = 0$

$\therefore$ 現在の宇宙に物質(baryon)が存在するためには、

(i) **sphaleron過程が脱結合する前に、$B - L \neq 0$が存在する。**

(ii) $B + L$**を電弱一次相転移で生成し**、且つ、
その後直ちにsphaleron過程が無効になる。

のどちらかでなければならない。

4. Requirements for EW Baryogenesis

電弱理論やその拡張に基づく $\longrightarrow$ **実験で検証可能**　(逆に言えば、制限がきつい)

(1) バリオン数非保存過程 = スファレロン過程 $(\Delta(B+L) \neq 0)$

平衡ならwash out $\longrightarrow$ 生成直後にdecouple

(2) CP対称性の破れ

KM位相では不十分[後述]

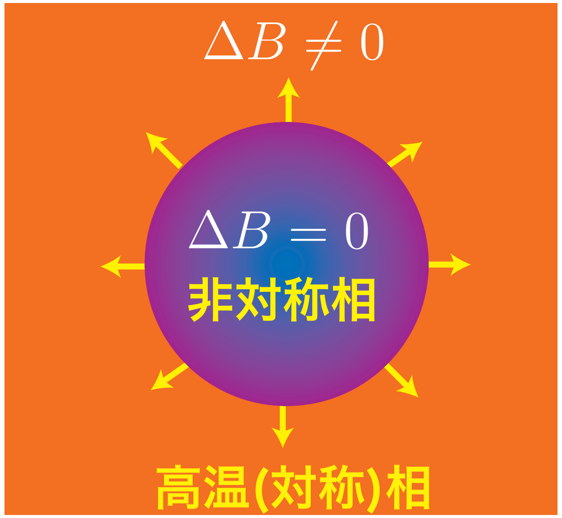
$\Longrightarrow$ 標準理論の拡張 — SUSY-SM, extra Higgs, $\cdots$

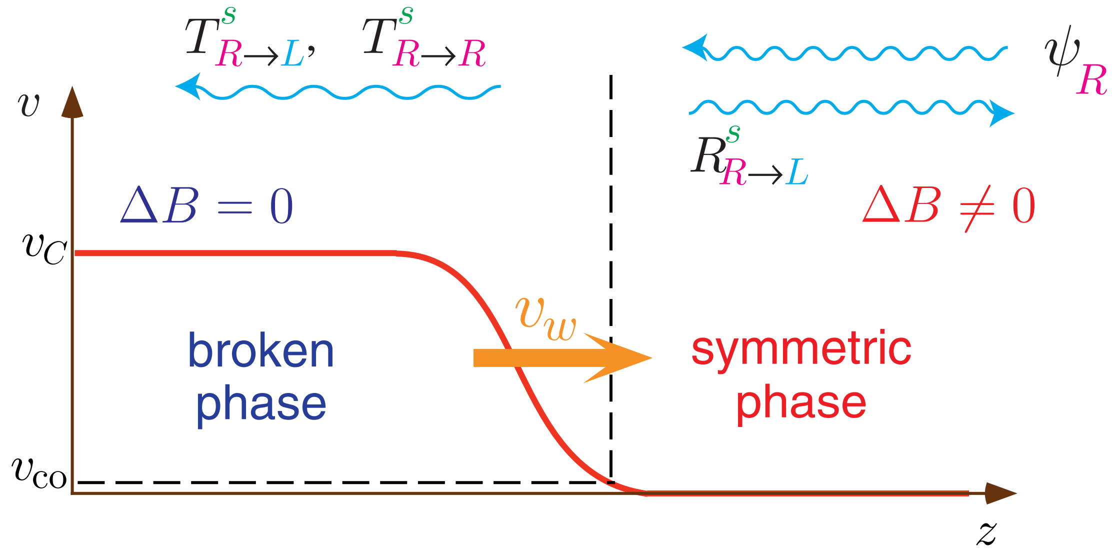
(3) 非平衡状態

$\bar{t}_{EW} = 10\text{GeV} < \bar{t}^{(\text{sym})}_{\text{sph}} = 10^3\text{GeV} \ll H(T)^{-1} = 10^{14}\text{GeV}$ at $T \simeq 100\text{GeV}$

$\longrightarrow$ 宇宙膨張は無視できる

$\Longrightarrow$ 電弱相転移が、相境界の形成・成長を伴う一次転移





bubble wall ($=$ Higgs + gauge config.)とのCPを破る相互作用 — B-conserving

$\Downarrow$

ψ_Lとψ_Rの反射率の差 + bubbl wallの運動

$\Downarrow$

chiral charge ($Q_L \neq Q_R$) が対称相に流れ込む $\boxed{\text{flux} \propto (Q_L - Q_R) \times (R^s_{R\to L} - R^s_{L\to R})}$

$\Downarrow$

スファレロン過程にバイアス $\mu_B \neq 0$

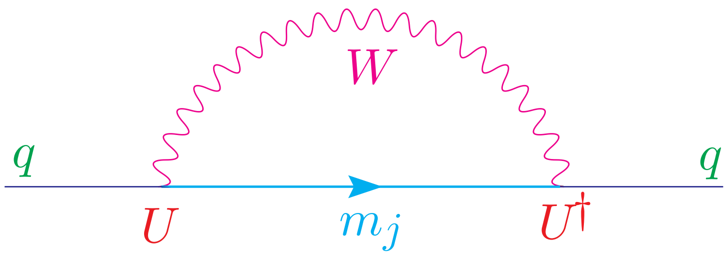
$\Downarrow$

バリオン数生成 $\dot{n}_B = -\frac{\mu_B}{T}\Gamma^{(s)}_{\rm sph}$ $\Longrightarrow$ 生成後直ちに非対称相で凍結

標準理論でEWBGは可能か？

▷ $m_h > 114$GeV (LEPII) $\Longrightarrow$ 電弱相境界はcross over

▷ CP対称性の破れはKM位相だけ



$m_i \neq m_j$

$\Rightarrow$ dispersionに$O(\alpha_W)$だけのCP violation effect

[Farrar and Shaposhnikov, Phys. Rev. D50 ('94)]

Weak int.の1-loop効果なので、かなり小さいが、さらに、

- QCD correction (short range) $\longrightarrow$ decoherence [Gavela, et al., Nucl. Phys. B430 ('94)]
- bubble wallとの多重散乱 [Huet and Sather, Phys. Rev. D51 ('95)]

$$\longrightarrow \left|\frac{n_B}{s}\right| < 10^{-26}$$

非平衡状態の実現とCP対称性の破れの２つの条件を満たすことが出来ない。

$\longrightarrow$ 1st-order EWPT & CP violtion の2条件を満たすように理論を拡張

▷ 電弱相転移が一次転移となるには、

⋆ boson loop からの $V_{\rm eff}(v;T)$ への寄与 $\sim -T\left(m(v)^2\right)^{3/2}$

Higgs bosonと相互作用するbosonで, $m(v)^2 \sim g^2v^2$ (for $v\sim 0$)となるもの

例) 2HDMのHiggs場, SUSY-SMのsfermion [light stop $m_{\tilde{t}_1} \lesssim m_t$]

$$m(v)^2 = m_0^2 + g^2v^2 \qquad (m_0^2 \ll g^2v_0^2)$$

⋆ 新しいタイプの一次相転移 — NMSSM [KF, Tao and Toyoda, PTP 114 ('05)]

sphaleron decoupling condition $\Longleftrightarrow$ 現象論的制限

▷ 新たなCP対称性の破れ

⋆ scalar self-interactionのcomplex parameters $\lambda_{6,7}$ in 2HDM, μB, A in SUSY-SM

⋆ complex Majorama mass gaugino, Higgsino soft masses in SUSY-SM

⋆ スカラー場の期待値がcomplex — 2つ以上の複素スカラー場の相対位相

EWBGに必要なのは、T_Cで形成されるbubble wall近傍でのCP violation

生成されるバリオン数の評価 — $\left\{\begin{array}{l}\text{I. chiaral charge flux} \\ \text{II. diffusion equation}\end{array}\right.$

I. chiral charge flux — diffusion eq.のsource term

$$\boxed{(i\partial\!\!\!/ - m(x))\,\psi(x) = 0} \qquad m(x) = \left\{\begin{array}{ll} y\,\langle\phi(x)\rangle = y\,v(x)e^{i\theta(x)} & \\ \langle\phi(x)\rangle\text{を含むmass matrix} & \text{[SUSY]}\end{array}\right.$$

▷ CP-violating wave equation

- ⋆ 数値解 [Nelson, et al, Nucl. Phys. B373 ('92); KF, et al, Prog. Theor. Phys. 95 ('96)]
- ⋆ 摂動論 — 様々な相互作用を取り入れられる、解析的関係式が導出できる
  - expansion w.r.t. $\mathrm{Im}\, m(x)$ [KF, et al, Phys. Rev. D50 ('94)]
  - expansion w.r.t. $m(x)$ — 自由粒子のbubble wallによる多重散乱 [Huet and Nelson, Phys. Lett. B355 ('95); Phys. Rev. D53 ('96)]
  - derivative expansion [Carena, et al., Nucl. Phys. B503 ('97)]

▷ Nonequilibrium field theory — Closed-Time-Path formalism

[Riotto, Phys. Rev. D53 ('96): Kainulainen, et al., JHEP 06 ('01); Phys. Rev. D66 ('02)]

II. diffusion equation — symmetric phase領域に流入するchiral chargeの評価

chargeやparticle number density Q_iに対するdiffusion equation:

$$\dot{Q}_i(t, \boldsymbol{x}) = D_{Q_i} \nabla^2 Q_i - \sum_j \Gamma_{ij} c_j Q_j + \text{[source term]}$$

D_Q: Qのdiffusion const. $\sim$ mean-free pathの数倍

Γ_{ij}: 反応過程によるQ_iの転換率　　　c_i: 統計因子

[Cohen, Kaplan, Nelson, Phys. Lett. B336 ('94); Joyce, Prokopec, Turok, Phys. Rev. D53 ('96)]

簡便計算法

非平衡定常状態$(\dot{Q}(t, \boldsymbol{x}) = 0)$で、(近似的に)保存される量$(\Gamma \simeq 0)$

$\Downarrow$

symmetric phaseに残るtotal chargeは

D_Qと流入するflux(source term)で評価できる

簡単のため1 generationで考える。 $\{u_L, d_L, u_R, d_R, \nu_L, e_L, e_R, \phi^0, \phi^-, W^-, Z\}$

「 symmetric phaseで$B = L = 0$である状態にYが注入されるときに生じるμ_Bは?」

— sphaleron過程以外の素過程は化学平衡

(近似的に)保存される量子数: $Q^a = \{B - L,\ Y,\ I_3,\ B\} \leftrightarrow \mu_{B-L},\ \mu_Y,\ \mu_{I_3},\ \mu_B$

各粒子の数密度: $$n_i = \frac{T^2}{6} k_i \mu_i = \frac{T^2}{6} k_i \sum_a q_i^a \mu_{Q^a}$$

$$\begin{cases} k_i = 1 \text{(Weyl fermion)} \\ k_i = 2 \text{(complex boson)} \end{cases}$$

$q_i^a =$ 粒子iが持つcharge Q^aの値

$$n_{u_L(d_L)} = \frac{T^2}{6}\left(\frac{1}{3}\mu_B + \frac{1}{3}\mu_{B-L} + \frac{1}{6}\mu_Y + (-)\frac{1}{2}\mu_{I_3}\right),$$

$$n_{u_R} = \frac{T^2}{6}\left(\frac{1}{3}\mu_B + \frac{1}{3}\mu_{B-L} + \frac{2}{3}\mu_Y\right), \qquad n_{d_R} = \frac{T^2}{6}\left(\frac{1}{3}\mu_B + \frac{1}{3}\mu_{B-L} - \frac{1}{3}\mu_Y\right),$$

$$n_{\nu_L(e_L)} = \frac{T^2}{6}\left(-\mu_{B-L} - \frac{1}{2}\mu_Y + (-)\frac{1}{2}\mu_{I_3}\right), \qquad n_{e_R} = \frac{T^2}{6}\left(-\mu_{B-L} - \mu_Y\right),$$

$$n_{\phi^0(\phi^-)} = \frac{T^2}{3}\left(-\frac{1}{2}\mu_Y + (-)\frac{1}{2}\mu_{I_3}\right), \qquad n_{W^-} = \frac{T^2}{3}(-\mu_{I_3}).$$

量子数Q^a: $\boxed{Q^a = \sum_i q_i^a n_i = \frac{T^2}{6}\sum_{i,b} k_i q_i^a q_i^b \mu_{Q_b}}$

化学平衡 $\rightarrow \mu_Y = \mu_{I_3}$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{3}\cdot 3_{\text{color}}\left(n_{u_L}+n_{d_L}+n_{u_R}+n_{d_R}\right) = \frac{T^2}{6}\left(\frac{4}{3}(\mu_B+\mu_{B-L})+\frac{2}{3}\mu_Y\right), \\
B-L &= B - \frac{T^2}{6}\left(-3\mu_{B-L}-2\mu_Y\right), \\
Y &= 3\left[\frac{1}{6}(n_{u_L}+n_{d_L})+\frac{2}{3}n_{u_R}-\frac{1}{3}n_{d_R}\right]-\frac{1}{2}(n_{\nu_L}+n_{e_L})-n_{e_R}-\frac{m}{2}(n_{\phi^0}+n_{\phi^-}) \\
&= \frac{T^2}{6}\left[\frac{2}{3}\mu_B+\frac{8}{3}\mu_{B-L}+\left(\frac{10}{3}+m\right)\mu_Y\right]
\end{aligned}
$$

($m =$ Higgs doubletの数)

$B=L=0$を課すと、 $\mu_{B-L} = -\frac{2}{3}\mu_Y$, $\mu_B = \frac{1}{6}\mu_Y$ $\longrightarrow Y = \frac{T^2}{6}\left(m+\frac{5}{3}\right)\mu_Y$

$$\therefore \quad \boxed{\mu_B = \frac{Y}{(m+5/3)T^2}}$$

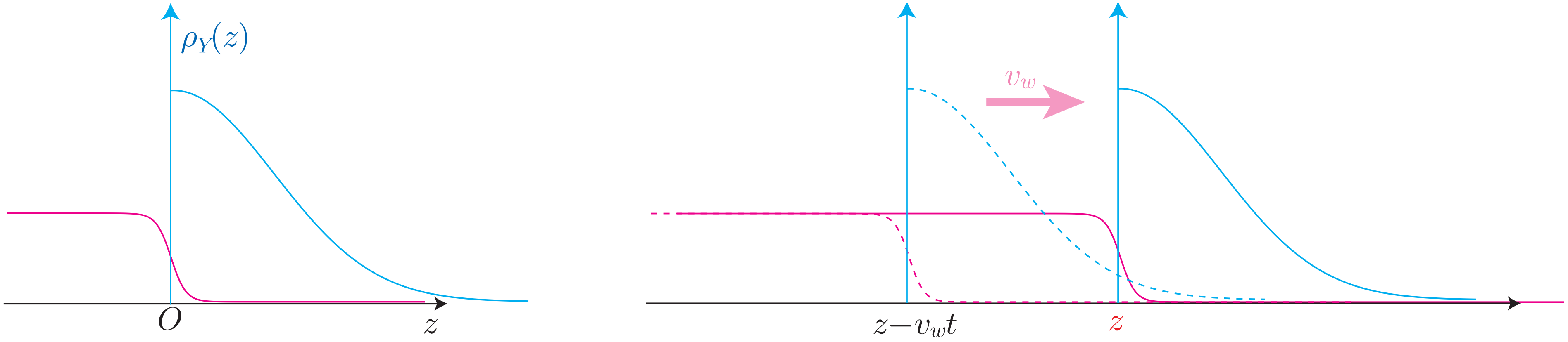
⋆ 生成されるBAU

$$n_B = -3\frac{\Gamma_{\rm sph}}{T}\int dt\,\mu_B = \frac{3\,\Gamma_{\rm sph}}{(m+5/3)T^3}\int_{-\infty}^{z/v_w} dt\,\rho_Y(z-v_w t)$$

bubble wallは一定速度v_wで動くとする。

$\rho_Y(z)$: wallから距離zのY-density

⇒ 右辺の積分=無限の過去から現在の位置zまでwallが動く間に貯まるYの総量



$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{z/v_w} dt\,\rho_Y(z-v_w t) = \frac{1}{v_w}\int_0^{\infty} dz\rho_Y(z) \simeq \frac{F_Y\tau}{v_w} \qquad (F_Y = \text{injected flux})$$

τ : wallで散乱された粒子がwallに捕まるまでに走る時間 $\simeq$ diffusion length

BAU: $\boxed{\dfrac{n_B}{s} \simeq 3\mathcal{N}\dfrac{100}{\pi^2 g_*}\cdot\kappa\alpha_W^4\cdot\dfrac{F_Y}{v_w T^3}\cdot\tau T}$

$$\mathcal{N} \sim O(1), \quad \tau \simeq \text{m.f.p.} \rightarrow \tau T \simeq \begin{cases} 1 & \text{for quarks} \\ 10^2 \sim 10^3 & \text{for leptons} \end{cases}$$

m.f.p.はtotal cross sectionを用いて評価されるが、

MC simulation $\Longrightarrow$ forward scattering enhanced :

for top quark $\tau T \simeq 10 \sim 10^3$ max. at $v_w \simeq 1/\sqrt{3}$

for this optimal case

$$\boxed{\frac{n_B}{s} \simeq 10^{-3}\cdot\frac{F_Y}{v_w T^3}}$$

$$\frac{F_Y}{v_w T^3} \sim O(10^{-7}) \Longrightarrow \text{十分なBAU}$$

⋆ **計算例** — toy model

$$m(z) = m_0 \frac{1+\tanh(az)}{2} \exp\left(-i\pi \frac{1-\tanh(az)}{2}\right)$$

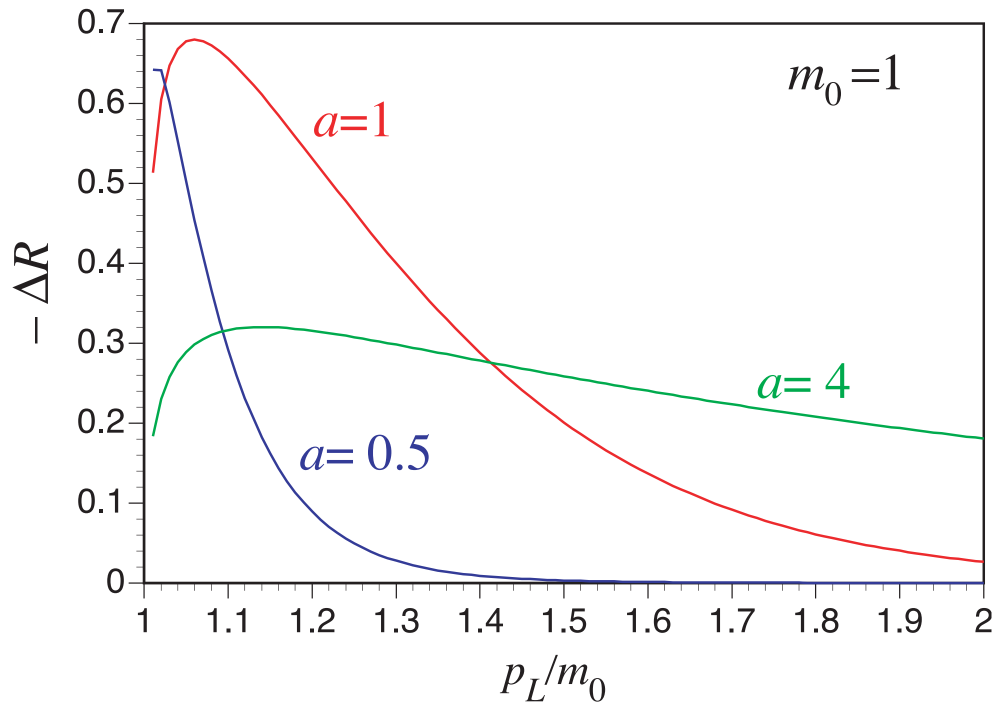
— no CP violation in the broken phase [$z \sim \infty$]

• $\Delta R \equiv R^s{}_{R\to L} - \bar{R}^s{}_{R\to L}$ [KF et al., Phys. Rev. D50 ('94); Prog. Theor. Phys. 95 ('96)]

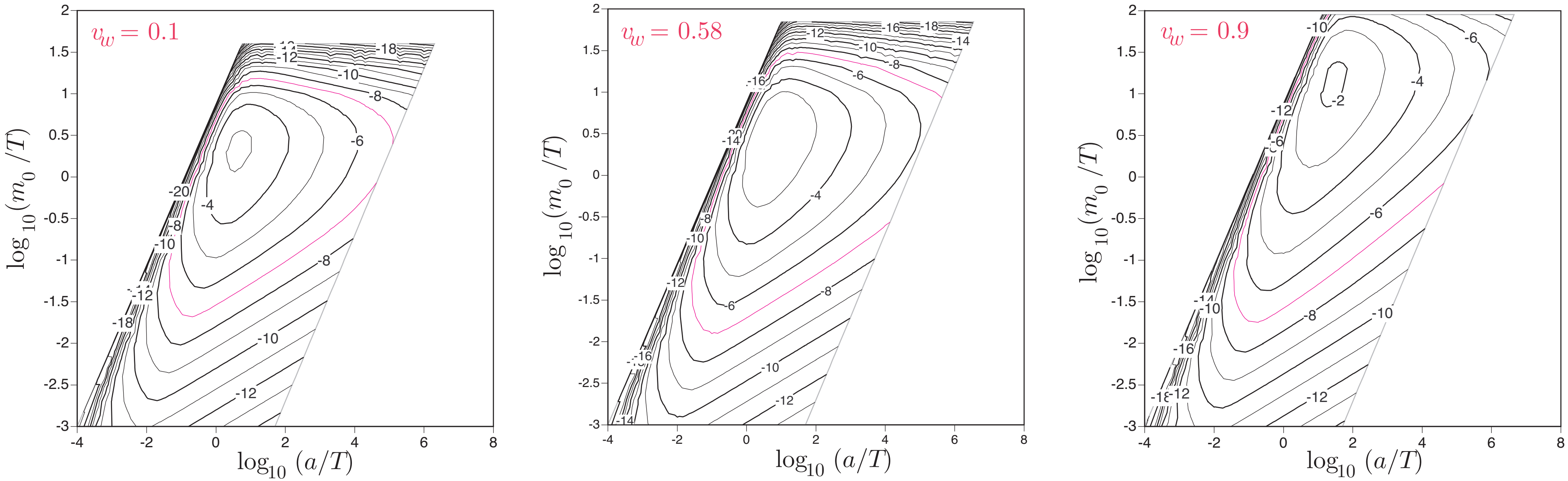
wall width $\simeq$ wave length of the carrier $\Rightarrow \Delta R \sim O(1)$

$\Downarrow$

大きなYukawa couplingは
必ずしも大きなfluxを
意味しない



• chiral charge flux $\frac{F_Q}{T^3(Q_L - Q_R)}$ [dimensionless] のlog plot at $T = 100$GeV



$$\frac{n_B}{s} \simeq 3\mathcal{N}\frac{100}{\pi^2 g_*} \cdot \kappa\alpha_W^4 \cdot \frac{F_Y}{v_w T^3} \cdot \tau T \overset{\text{optimal}}{\simeq} 10^{-3} \cdot \frac{F_Y}{v_w T^3}$$

bubble wall近傍で$O(1)$のCP phaseを仮定しているが、もっと小さくてもOK

5. Leptogenesis

この節の内容

5.1 Seesaw mechanism

5.2 CP violation in N_R-decay

5.3 Calculation of generated lepton number

review articles

- ⋆ Buchmüller, Di Bari and Plümacher, Ann. Phys. 315 ('05)
- Buchmüller, Peccei and Yanagida, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 55 ('05) [hep-ph/0502169]
- Buchmüller, hep-ph/0101102

5.1 Seesaw mechanism

Minimal SM + singlet N_R を考える。 (2-spinor notation)

$$\mathcal{L}_Y = y_{ij}\epsilon^{ab} l_{aiL} e^c_{jR} \Phi_b - h_{ij}\epsilon^{ab} l_{aiL} N^c_{jR} \tilde{\Phi}_b - \frac{1}{2} M_{ij} N^c_{iR} N^c_{jR} + \text{h.c.}$$

$SU(2)$ doublets: $\quad l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Phi} = -i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} -\phi^+ \\ \phi^{0*} \end{pmatrix}$

ここでy, h, Mは任意の$N_f \times N_f$**複素行列**

$h \neq 0$ **かつ** $M \neq 0 \Longrightarrow$ L-violation

$\star\ T = 0$ vacuum: $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &\sim -\frac{y_{ij} v_0}{\sqrt{2}} e_{iL} e^c_{jR} - \frac{h_{ij} v_0}{\sqrt{2}} \nu_{iL} N^c_{iR} - \frac{1}{2} M_{ij} N^c_{iR} N^c_{jR} + \text{h.c.} \\ &= -e_L^T m_e e^c_R - \nu_L^T m_\nu N^c_R - \frac{1}{2} N^{cT}_R M N^c_R + \text{h.c.} \end{aligned}$$

m_eとm_νをbi-unitary変換で対角化。

$$U_L^{(e)} m_e U_R^{(e)} = \mathrm{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \qquad S_L m_\nu S_R = \Lambda_D = \text{diagonal}$$

ここで $\quad e_R^c = U_R^{(e)} e_R'^{\,c}, \qquad e_L = U_L^{(e)T} e_L', \qquad N_R^c = S_R N_R'^{\,c}, \qquad \nu_L = S_L^T \nu_L'$

$\tilde{M} = S_R^T M S_R$と置くと、mass termは

$$\mathcal{L}_m = -m_{i\,e} e_{iL}'^{T} e_{iR}'^{\,c} - \frac{1}{2} \left(\nu_L'^T \;\; N_R'^{\,cT} \right) \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_D \\ \Lambda_D & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L' \\ N_R'^{\,c} \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

$V = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_D \tilde{M}^{-1} \\ -\tilde{M}^{-1}\Lambda_D & 1 \end{pmatrix}$と 定義すると、$V^\dagger V = 1 + O(\Lambda_D^2 \tilde{M}^{-2})$で近似的にunitary

$$\longrightarrow V^T \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_D \\ \Lambda_D & \tilde{M} \end{pmatrix} V \simeq \begin{pmatrix} -\Lambda_D \tilde{M}^{-1} \Lambda_D & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{pmatrix}$$

$-T_L^T (\Lambda_D \tilde{M}^{-1} \Lambda_D) T_L = \Lambda_l, \qquad T_R^T \tilde{M} T_R = \Lambda_h$ とすると、

$$\mathcal{L}_{\nu-m} = -\frac{1}{2} \left(\nu_L'^T \;\; N_R'^{\,cT} \right) V^* \begin{pmatrix} T_L^* & 0 \\ 0 & T_R^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_l & 0 \\ 0 & \Lambda_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_L^\dagger & 0 \\ 0 & T_R^\dagger \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L' \\ N_R'^{\,c} \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

mass eigenstates : $\begin{cases} \eta_{lL} = T_L^\dagger \left[\nu'_L - \Lambda_D (\tilde{M}^{-1})^\dagger N'^c_R\right] \\ \eta_{hL} = T_R^\dagger \left[N'^c_R + (\tilde{M}^{-1})^\dagger \Lambda_D \nu'_L\right] \end{cases}$

gauge相互作用

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &\sim \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\bar{e}_L \bar{\sigma}^\mu \nu_L + \nu_L \sigma^\mu \bar{e}_L\right] W^-_\mu + \text{h.c.} \\ &\simeq \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\bar{e}_L \bar{\sigma}^\mu (U_L^{(e)*} S_L^T T_L) \eta_{lL} + \eta_{lL} \sigma^\mu (T_L^T S_L U_L^{(e)\dagger}) \bar{e}'_L\right] W^-_\mu + \text{h.c.} \end{aligned}$$

$\longrightarrow (U_{MNS})_{fi} = \left(U_L^{(e)*} S_L^T T_L\right)_{fi}$ f =lepton flavor, i =mass eigenstate

3 CP phases

実験・観測 $\Longrightarrow \begin{cases} \Lambda_D\text{の成分の自乗差} \\ U_{MNS}\text{の成分} \end{cases}$

5.2 CP violation in N_R-decay

$\star\ T > O(100)$GeV — symmetric phase

gauge boson, leptonはmassless

Higgs boson (ϕ^0, ϕ^-)は全てphysicalで同じmass

heavy neutrino Nのdecay asymmetry $\longleftarrow$ CP対称性の破れ

$SU(2)$ symmetry
$$\begin{cases} \Gamma(N_i \to e_j^- \phi^+) = \Gamma(N_i \to \nu_j \phi^0) \equiv \Gamma(N_i \to l_j \phi) \\ \Gamma(N_i \to e_j^+ \phi^-) = \Gamma(N_i \to \bar{\nu}_j \phi^{0*}) \equiv \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi}) \end{cases}$$

partial decay asym.
$$\varepsilon_{i\to j} \equiv \frac{\Gamma(N_i \to l_j \phi) - \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi})}{\Gamma(N_i \to l_j \phi) + \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi})}$$

total decay asym.
$$\varepsilon_i \equiv \frac{\sum_j \Gamma(N_i \to l_j \phi) - \sum_j \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi})}{\sum_j \Gamma(N_i \to l_j \phi) + \sum_j \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi})}$$

$\longrightarrow$ Leptogenesis

注: このCP破れはU_{MNS}のphaseと間接的にしか関係しない

計算例は後述

5.3 Calculation of generated lepton number

膨張する宇宙空間でのBoltzmann方程式[in comoving frame]

$$\frac{dn_\psi(t)}{dt} + 3H(t)n_\psi(t) = -\sum_{i,j,\cdots}[\gamma(\psi \to i+j+\cdots) - \gamma(i+j+\cdots \to \psi)] - \sum_{a,i,j,\cdots}[\gamma(\psi + a \to i+j+\cdots) - \gamma(i+j+\cdots \to \psi + a)]$$

ここで反応率γは次で与えられる:

$$\gamma(\psi+a+b+\cdots \to i+j+\cdots) = \int d\tilde{\boldsymbol{p}}_\psi\, d\tilde{\boldsymbol{p}}_a \cdots d\tilde{\boldsymbol{p}}_j\, (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + \cdots - p_i - p_j - \cdots) \times |\mathcal{M}(\psi+a+b+\cdots \to i+j+\cdots)|^2 f_\psi f_a f_b \cdots (1\pm f_i)(1\pm f_j)\cdots$$

$d\tilde{p} \equiv \dfrac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}$, $\quad f_\psi(\boldsymbol{p},t) =$粒子$\psi$の分布函数, $\quad \pm = \begin{cases} \text{boson} \\ \text{fermion} \end{cases}$

粒子数密度: $n_\psi(t) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} f_\psi(\boldsymbol{p}, t)$

$\boxed{\text{平衡状態では、Boltzmann eq.の右辺} = 0}$

平衡分布函数 f^{eq} については、energy保存則を用いると、 $1 \pm \frac{1}{e^{\beta E} \mp 1} = \frac{e^{\beta E}}{e^{\beta E} \mp 1}$

$$
\begin{aligned}
f_\psi^{\text{eq}}(1 \pm f_i^{\text{eq}})(1 \pm f_j^{\text{eq}}) \cdots &= \frac{1}{e^{\beta E_\psi} \mp 1} \frac{e^{\beta E_i}}{e^{\beta E_i} \mp 1} \frac{e^{\beta E_j}}{e^{\beta E_j} \mp 1} \cdots \\
&= \frac{e^{\beta E_\psi}}{e^{\beta E_\psi} \mp 1} \frac{1}{e^{\beta E_i} \mp 1} \frac{1}{e^{\beta E_j} \mp 1} \cdots = f_i^{\text{eq}} f_j^{\text{eq}} \cdots (1 \pm f_\psi^{\text{eq}})
\end{aligned}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
&\gamma(\psi \to i + j + \cdots) - \gamma(i + j + \cdots \to \psi) \\
&= \int d\tilde{\boldsymbol{p}}_\psi \, d\tilde{\boldsymbol{p}}_i \cdots (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi - p_i - p_j - \cdots) f_\psi^{\text{eq}}(1 \pm f_i^{\text{eq}})(1 \pm f_j^{\text{eq}}) \cdots \\
&\quad \times \left[|\mathcal{M}(\psi \to i + j + \cdots)|^2 - |\mathcal{M}(i + j + \cdots \to \psi)|^2 \right]
\end{aligned}
$$

unitarity: [Kolb and Wolfram, Appendix of Nucl. Phys. B172]

$$\sum_{i,j,\cdots} \left|\mathcal{M}(\psi \to i + j + \cdots)\right|^2 (1 \pm f_i^{\rm eq})(1 \pm f_j^{\rm eq}) \cdots$$
$$= \sum_{i,j,\cdots} \left|\mathcal{M}(i + j + \cdots \to \psi)\right|^2 (1 \pm f_i^{\rm eq})(1 \pm f_j^{\rm eq}) \cdots$$

$$\therefore \quad \sum_{i,j,\cdots} \left[\gamma(\psi \to i + j + \cdots) - \gamma(i + j + \cdots \to \psi)\right] = 0$$

$\boxed{\text{CP-symmetry} \Rightarrow n_\psi - n_{\bar\psi}\text{は発展しない}}$ $f_\psi(t) = f_{\bar\psi}(t)$, $\mathcal{M}(\alpha \to \beta) = \mathcal{M}(\bar\alpha \to \bar\beta)$

$n_\psi - n_{\bar\psi}$ に対するBoltzmann eq.の右辺:

$$
\begin{aligned}
&\gamma(\psi \to i + j + \cdots) - \gamma(i + j + \cdots \to \psi) - \left[\gamma(\bar\psi \to \bar i + \bar j + \cdots) - \gamma(\bar i + \bar j + \cdots \to \bar\psi)\right] \\
&= \int d\tilde{\boldsymbol{p}}_\psi \cdots (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi - p_i - p_j - \cdots) \\
&\quad \times \Big\{ \left[|\mathcal{M}(\psi \to i + j + \cdots)|^2 - \left|\mathcal{M}(\bar\psi \to \bar i + \bar j + \cdots)\right|^2\right] f_\psi (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots \\
&\qquad - \left[|\mathcal{M}(i + j + \cdots \to \psi)|^2 - \left|\mathcal{M}(\bar i + \bar j + \cdots \to \bar\psi)\right|^2\right] f_i f_j \cdots (1 \pm f_\psi) \Big\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Boltzmann eq.の解法

分布函数 $f(t,\boldsymbol{p})$に対する方程式 $\Rightarrow$ 粒子数密度 $n(t)$に対する方程式

$$\boxed{f(\boldsymbol{p},t)=\frac{n(t)}{n^{\rm eq}}f^{\rm eq}(\boldsymbol{p})}$$

[#(elastic scatt.) $\gg$ #(inelastic scatt)]

この置き換えの妥当性についてはDiscussionsで

Boltzmann eq.

$$\begin{aligned}
&\dot{n}_\psi(t)+3H(t)n(t)\\
&=\ -\sum_{i,j,\cdots}\left[\frac{n_\psi}{n_\psi^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\psi\to i+j+\cdots)-\frac{n_i n_j\cdots}{n_i^{\rm eq}n_j^{\rm eq}\cdots}\gamma^{\rm eq}(i+j+\cdots\to\psi)\right]\\
&\quad\ -\sum_{a,i,\cdots}\left[\frac{n_\psi n_a}{n_\psi^{\rm eq}n_a^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\psi+a\to i+j+\cdots)-\frac{n_i n_j\cdots}{n_i^{\rm eq}n_j^{\rm eq}\cdots}\gamma^{\rm eq}(i+j+\cdots\to\psi+a)\right]
\end{aligned}$$

$\gamma^{\rm eq}(\cdots)=$ 平衡分布$f^{\rm eq}(\boldsymbol{p})$で計算した$\gamma(\cdots)$

変数変換

左辺の膨張の効果を、$n_\psi(t)$をsで割ることで吸収する。

entropy density: $$s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 \qquad g_* = \sum_B g_B + \frac{7}{8}\sum_F g_F$$

Hubble parameter in flat RD universe: $$H(t) \simeq \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_r\right)^{1/2} = \left(\frac{8\pi G}{3}\frac{\pi^2}{30} g_* T^4\right)^{1/2}$$

$$\longrightarrow a(t) \propto t^{1/2} \sim T^{-1}, \qquad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{2t}$$

このとき、 $\dot{s} = \frac{3}{T} s \frac{dT}{dt} = 3s \frac{d\log T}{dt} = -3s\frac{1}{2t} = -3sH(t)$ により

$Y_\psi \equiv \frac{n_\psi}{s}$ と定義すると、 $\dot{n}_\psi = s\dot{Y}_\psi + \dot{s}Y_\psi = s\dot{Y}_\psi - 3sH(t)Y_\psi = s\dot{Y}_\psi - 3H(t)n_\psi$

$\longrightarrow$ Boltzmann eq.の左辺: $$\boxed{\dot{n}_\psi(t) + 3H(t)n_\psi(t) = s\dot{Y}_\psi(t)}$$

$t \to z = \dfrac{M}{T}$:無次元パラメータ　　M =heavy-ν mass　　t の増加 $\Leftrightarrow$ z の増加

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= -\frac{M}{T^2}\frac{dT}{dt}\frac{d}{dz} = -z\frac{d\log T}{dt}\frac{d}{dz} = H(t)z\frac{d}{dz} = \left(\frac{4\pi^3}{45}g_*\right)^{1/2}\frac{T^2}{m_{\rm Pl}}z\frac{d}{dz} \\
&= \left(\frac{4\pi^3}{45}g_*\right)^{1/2}\frac{M^2}{m_{\rm Pl}}\frac{1}{z}\frac{d}{dz}
\end{aligned}
$$

これにより

$$
\begin{aligned}
s\frac{dY_\psi}{dt} &= \left(\frac{4\pi^3}{45}g_*\right)^{1/2}\frac{2\pi^2}{45}g_*T^3\frac{M^2}{m_{\rm Pl}}\frac{1}{z}\frac{dY_\psi}{dz} = \left(\frac{2\pi^2}{45}g_*\right)^{3/2}\sqrt{2\pi}\frac{M^5}{m_{\rm Pl}}\frac{1}{z^4}\frac{dY_\psi}{dz} \\
&\equiv C\,M^4\frac{1}{z^4}\frac{dY_\psi}{dz}
\end{aligned}
$$

$$
C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{2\pi^2}{45}g_*\right)^{3/2}\frac{M}{m_{\rm Pl}}
$$
: 無次元定数

[$M \ll m_{\rm Pl}$の場合は数値計算に注意; cf. CDM]

Boltzmann eq.

$$
\begin{aligned}
&C\frac{M^4}{z^4}\frac{dY_\psi}{dz}\\
&= \quad -\sum_{i,j,\cdots}\left[\frac{Y_\psi}{Y_\psi^{\mathrm{eq}}}\gamma^{\mathrm{eq}}(\psi\to i+j+\cdots)-\frac{Y_iY_j\cdots}{Y_i^{\mathrm{eq}}Y_j^{\mathrm{eq}}\cdots}\gamma^{\mathrm{eq}}(i+j+\cdots\to\psi)\right]\\
&\qquad -\sum_{a,i,\cdots}\left[\frac{Y_\psi Y_a}{Y_\psi^{\mathrm{eq}}Y_a^{\mathrm{eq}}}\gamma^{\mathrm{eq}}(\psi+a\to i+j+\cdots)-\frac{Y_iY_j\cdots}{Y_i^{\mathrm{eq}}Y_j^{\mathrm{eq}}\cdots}\gamma^{\mathrm{eq}}(i+j+\cdots\to\psi+a)\right]
\end{aligned}
$$

実際には、$(\psi,a,i,j)=N_i,l,\bar{l},\phi,\bar{\phi}$などとして、連立のBoltzmann eqs.を解く。

System of $(N_i, l, \bar{l}, \phi, \bar{\phi})$

$$\Delta L = \pm 1 : \; N_i \to l\phi,\; N_i \to \bar{l}\bar{\phi},\; l\phi \to N_i,\; \bar{l}\bar{\phi} \to N_i$$

$$\Delta L = \pm 2 : \; l\phi \to \bar{l}\bar{\phi},\; \bar{l}\bar{\phi} \to l\phi$$

平衡状態での粒子数密度 ($T \gg m_\phi$)

$$n_l^{\rm eq} = n_{\bar{l}}^{\rm eq} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{3}{4} \times 3_{\rm gen} \times 2_{\rm isospin}\right) T^3, \qquad n_\phi^{\rm eq} = n_{\bar{\phi}}^{\rm eq} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \cdot 2 \cdot T^3$$

heavy-νは、decouplingの効果を見るので有限のmassで計算する

occupation no.が大きいので、 $f^{\rm eq}(\boldsymbol{p}) \simeq e^{-E_{\boldsymbol{p}}/T}$と近似して

$$\begin{aligned} n_N^{\rm eq} &= 2 \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} e^{-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2}/T} = 2 \cdot \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx\, x^2\, e^{-\sqrt{x^2+z^2}} \qquad (z = M/T) \\ &= 2 \cdot \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_2(z) \qquad (K_n(z) : \text{ modified Bessel function}) \end{aligned}$$

Boltzmann equations

$$C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{2\pi^2}{45}g_*\right)^{3/2}\frac{M_i}{m_{\rm Pl}}$$

$$C\frac{M_i^4}{z^4}\frac{dY_{N_i}}{dz} = -\frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\rm eq}}\left[\gamma^{\rm eq}(N_i \to l\phi) + \gamma^{\rm eq}(N \to \bar{l}\bar{\phi})\right] + \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\rm eq}Y_\phi^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(l\phi \to N_i) + \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\rm eq}Y_{\bar{\phi}}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to N_i)$$

$$C\frac{M_i^4}{z^4}\frac{dY_l}{dz} = \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(N_i \to l\phi) - \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\rm eq}Y_\phi^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(l\phi \to N_i) + \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\rm eq}Y_{\bar{\phi}}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to l\phi) - \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\rm eq}Y_\phi^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(l\phi \to \bar{l}\bar{\phi})$$

$$C\frac{M_i^4}{z^4}\frac{dY_{\bar{l}}}{dz} = \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(N_i \to \bar{l}\bar{\phi}) - \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\rm eq}Y_{\bar{\phi}}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to N_i) - \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\rm eq}Y_{\bar{\phi}}^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to l\phi) + \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\rm eq}Y_\phi^{\rm eq}}\gamma^{\rm eq}(l\phi \to \bar{l}\bar{\phi})$$

Y_ϕ, $Y_{\bar{\phi}}$についても同様

$\gamma^{\rm eq}$の計算　$[f^{\rm eq} \simeq e^{-E/T}, 1 \pm f^{\rm eq} \simeq 1]$

$$\gamma^{\rm eq}(N \to l\phi) = \int d\tilde{\boldsymbol{p}}_1 \cdots f_N^{\rm eq}(\boldsymbol{p}_1)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)\,|\mathcal{M}(N \to l\phi)|^2$$

$$= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} e^{-E_1/T} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{d^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)\,|\mathcal{M}(N \to l\phi)|^2$$

$$= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} e^{-E_1/T}\, 2M\,\Gamma_{rs}(N \to l\phi)$$

decay width in the rest frame of N

ここでp_1積分は

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{M}{E_1} e^{-\sqrt{p_1^2+M^2}/T} = \frac{M}{2\pi^2}\int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2+M^2}} e^{-\sqrt{p^2+M^2}/T} = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z)$$

CPT-inv. $\Rightarrow$

$$\gamma^{\rm eq}(N \to l\phi) = \gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to N) = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z)\,\Gamma_{rs}(N \to l\phi)$$

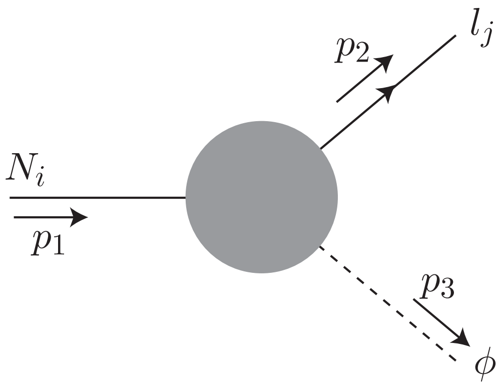
$$\gamma^{\rm eq}(N \to \bar{l}\bar{\phi}) = \gamma^{\rm eq}(l\phi \to N) = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z)\,\Gamma_{rs}(N \to \bar{l}\bar{\phi})$$

$\Gamma_{rs}(N \to l\phi)$と $\Gamma_{rs}(N \to \bar{l}\bar{\phi})$の計算

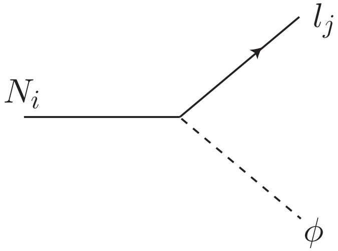
$$\mathcal{L}_Y = -h_{ij}\left(\bar{N}_i \frac{1-\gamma_5}{2}\nu_j \phi^0 - \bar{N}_i \frac{1-\gamma_5}{2} e_j \phi^+\right) - h_{ij}^*\left(\bar{\nu}_j \frac{1+\gamma_5}{2} N_i \phi^{0*} - \bar{e}_j \frac{1+\gamma_5}{2} N_i \phi^-\right)$$

amplitudes:

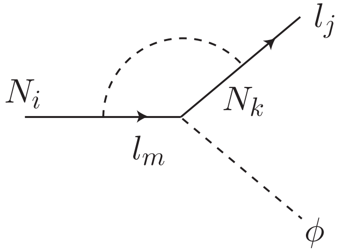
$$i\mathcal{M}(N_i \to l_j \phi) =$$



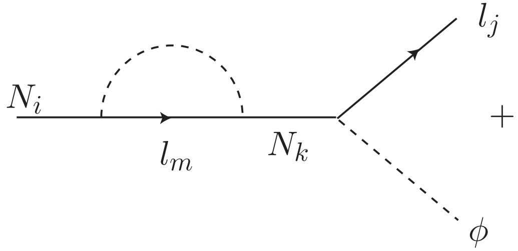
$=$



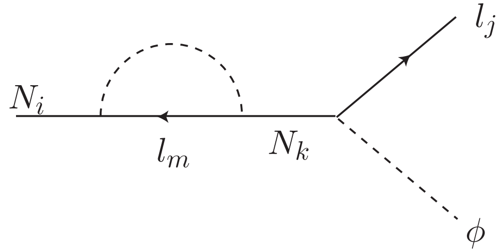
$+$



$+$



$+$



$+ \dots$

$$\equiv \quad i\mathcal{M}_0 + i\mathcal{M}_A + i\mathcal{M}_B + i\mathcal{M}_C + \cdots$$

Feynman rule for Majorana fermions

Majorana 4-fermion $N(x)$: $N^c(x) = C(\bar{N}(x))^T = N(x)$, or $(\bar{N}(x))^T = C^{-1}N(x)$

propagator:

$$\langle N_a \bar{N}_b \rangle = \left(\frac{i}{\not{p} - M} \right)_{ab},$$

$$\langle N_a N_b \rangle = C_{bc} \langle N_a \bar{N}_c \rangle = \left(\frac{i}{\not{p} - M} C^T \right)_{ab}, \qquad \langle \bar{N}_a \bar{N}_b \rangle = \left(C^{-1} \frac{i}{\not{p} - M} \right)_{ab}$$

end point of an external line:

$$N_a |p, s\rangle = U_a^s(p), \qquad \bar{N}_a |p, s\rangle = \left(C^{-1}\right)_{ab} U_b^s(p),$$

$$\langle p, s| \bar{N}_a = \bar{U}_a^s(p), \qquad \langle p, s| N_a = \bar{U}_b^s(p) \left(C^T\right)_{ba}$$

Dirac fermion:

$\psi_a |p, s\rangle = u_a^s(p)$, $\langle p, s| \bar{\psi}_a = \bar{u}_a^s(p)$: fermion in $|p, s\rangle$

$\bar{\psi}_a |p, s\rangle = \bar{v}_a^s(p)$, $\langle p, s| \psi_a = v_a^s(p)$: anti-fermion in $|p, s\rangle$

tree level : $i\mathcal{M}_0 = i h^*_{ij}\, \bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}U^s_i(p_1)$

one-loop :

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_A &= h_{im}h^*_{km}h^*_{kj}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}\frac{M_k}{k^2-M_k^2}\frac{\not{k}-\not{p}_3}{(k-p_3)^2}U^s_i(p_1)\,\frac{1}{(k+p_2)^2}\\
&= i(hh^\dagger)_{ik}h^*_{kj}\; C\left(\frac{M_k^2}{M_i^2}\right)\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}U^s_i(p_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_B &= h_{im}h^*_{km}h^*_{kj}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}\frac{M_k}{p_1^2-M_k^2}\frac{\not{k}}{k^2}U^s_i(p_1)\,\frac{1}{(k+p_1)^2}\\
&= i(hh^\dagger)_{ik}h^*_{kj}\; A(M_i^2)\frac{M_iM_k}{M_i^2-M_k^2}\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}U^s_i(p_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_C &= -h^*_{im}h_{km}h^*_{kj}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}\frac{\not{p}_1}{p_1^2-M_k^2}\frac{\not{k}}{k^2}U^s_i(p_1)\,\frac{1}{(k-p_1)^2}\\
&= i(hh^\dagger)_{ki}h^*_kj\; A(M_i^2)\frac{M_i^2}{M_i^2-M_k^2}\bar{u}^{s'}_j(p_2)\frac{1+\gamma_5}{2}U^s_i(p_1)
\end{aligned}
$$

ここで$A(p^2)$と$C(\xi)$は次で定義される

$$
\begin{aligned}
A(p^2) &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx\, x\left[\log(x-x^2)+\log(-p^2-i\epsilon)\right] \\
C(\xi) &= \frac{\sqrt{\xi}}{16\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{1-x}{(1-x-y)\xi-xy-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

$A(p^2)$ is $\overline{\text{MS}}$-regulated, while the Im-part is finite.

total decay width — tree-level contribution

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \left[\Gamma(N_i\to l_j\phi)+\Gamma(N_i\to \bar{l}_j\bar{\phi})\right] \\
&= \frac{2}{2M_i}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{d^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\,2(hh^\dagger)_{ii}\,(p_1\cdot p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-p_3) \\
&= \frac{1}{8\pi}(hh^\dagger)_{ii}\,M_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_j \left[\Gamma(N_i \to l_j \phi) - \Gamma(N_i \to \bar{l}_j \bar{\phi})\right]
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq i} M_i \,\mathrm{Im}\left[\left((hh^\dagger)_{ki}\right)^2\right] \left[\frac{2M_i M_k}{M_i^2 - M_k^2} \mathrm{Im} A(M_i^2) + \mathrm{Im} C\left(\frac{M_k^2}{M_i^2}\right)\right] \\
&= \frac{M_i}{(8\pi)^2} \sum_{k \neq i} \mathrm{Im}\left[\left((hh^\dagger)_{ki}\right)^2\right] \left[f(\xi_k) + g(\xi_k)\right]
\end{aligned}
$$

ここで $\quad \xi_k^2 \equiv M_k^2 / M_i^2, \qquad f(\xi) = \sqrt{\xi}\left[1 - (1+\xi) \log \frac{1+\xi}{\xi}\right], \qquad g(\xi) = \frac{\sqrt{\xi}}{1-\xi}$

$$
\mathrm{Im} A(M^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx\, x\, \mathrm{Im} \log(-M^2 - i\epsilon) = \frac{1}{16\pi^2}(-\pi) = -\frac{1}{16\pi}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im} C(\xi) &= \frac{\sqrt{\xi}}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \mathrm{Im} \frac{1-x}{(1-x-y)\xi - xy - i\epsilon} \\
&= \frac{\sqrt{\xi}}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \pi(1-x)\delta\left((1-x)\xi - (x+\xi)y\right) \\
&= \frac{\sqrt{\xi}}{16\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x}{x+\xi} \int_0^{1-x} dy\, \delta\left(y - \frac{1-x}{x+\xi}\right) = \frac{\sqrt{\xi}}{16\pi} \int_0^1 dx \left(\frac{1+\xi}{x+\xi} - 1\right)
\end{aligned}
$$

N_iのdecay asymmetryは

$$\varepsilon_i = \frac{1}{8\pi (hh^\dagger)_{ii}} \sum_{k\neq i} \mathrm{Im}\left[\left((hh^\dagger)_{ki}\right)^2\right] [f(\xi_k) + g(\xi_k)]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \Gamma(N_i \to l\phi) = \dfrac{1+\varepsilon_i}{2}\Gamma = \dfrac{(hh^\dagger)_{ii}}{16\pi}(1+\varepsilon_i)M_i \\ \Gamma(N_i \to \bar{l}\bar{\phi}) = \dfrac{1-\varepsilon_i}{2}\Gamma = \dfrac{(hh^\dagger)_{ii}}{16\pi}(1-\varepsilon_i)M_i \end{cases}$$

Boltzmann eq.のscattering terms

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(N_i \to l\phi) = \gamma^{\mathrm{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \to N_i) = \frac{(hh^\dagger)_{ii}}{32\pi^3} T^4 z^3 K_1(z) (1+\varepsilon_i)$$

$$\gamma^{\mathrm{eq}}(N_i \to \bar{l}\bar{\phi}) = \gamma^{\mathrm{eq}}(l\phi \to N_i) = \frac{(hh^\dagger)_{ii}}{32\pi^3} T^4 z^3 K_1(z) (1-\varepsilon_i)$$

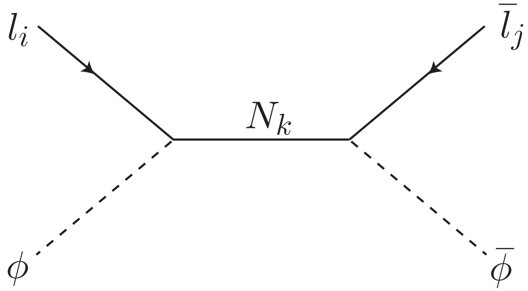
$$z = \frac{M_i}{T}$$

$\Delta L = \pm 2$-scattering terms:

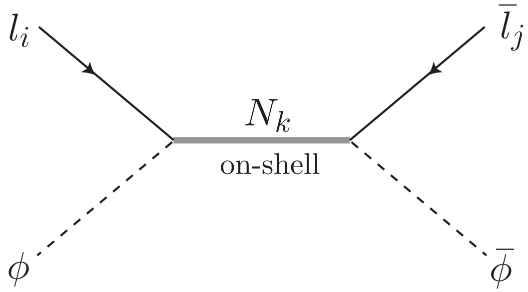
中間状態がon-shellの N_k の寄与を差し引く — N_k のdecayとinverse decayで考慮済み

$$|\mathcal{M}^{\rm os}(l\phi \to l\phi)|^2 = |\mathcal{M}(l\phi \to N_i)|^2 \frac{\pi\delta(s - M_i^2)}{M_i\Gamma_i} \left|\mathcal{M}(N_i \to \bar{l}\bar{\phi})\right|^2 \simeq \frac{1 - 2\epsilon_i}{4} \frac{\pi\delta(s - M_i^2)}{M_i\Gamma_i} \Gamma_i^2$$

$\gamma^{\rm eq}(l\phi \to \bar{l}\bar{\phi}) =$



$-$



$$= \frac{T^4}{32\pi^2} \frac{\left[(hh^\dagger)_{kk}\right]^2}{16\pi} \int_0^\infty dt\, t^2 K_1(t) \tilde{f}(t^2/z^2)$$

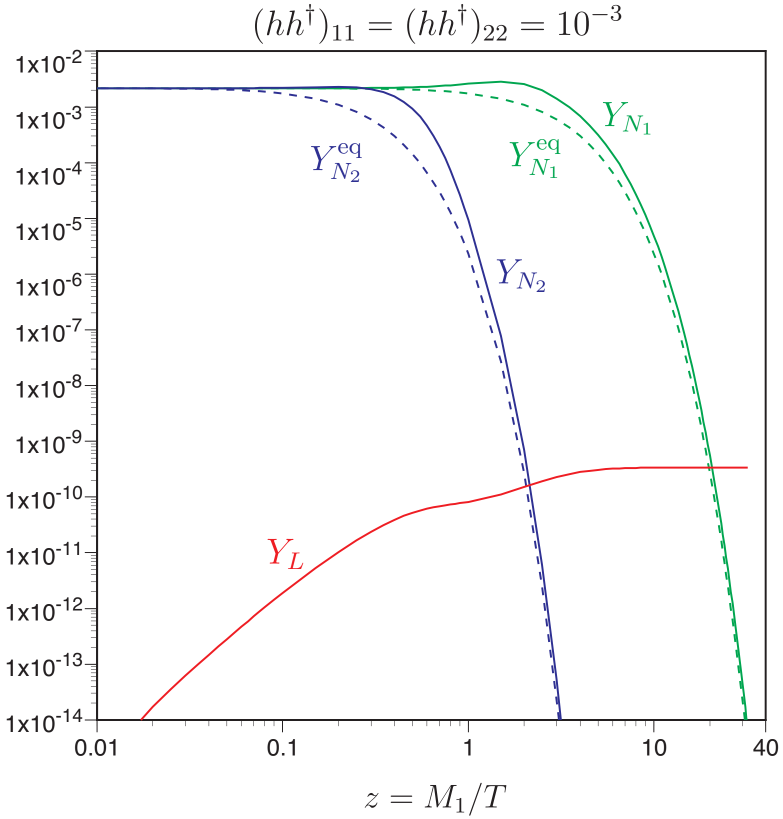
$$\gamma^{\rm eq}(\bar{l}\bar{\phi} \to l\phi) = \frac{T^4}{32\pi^2} \frac{\left[(h^* h^T)_{kk}\right]^2}{16\pi} \int_0^\infty dt\, t^2 K_1(t) \tilde{f}(t^2/z^2)$$

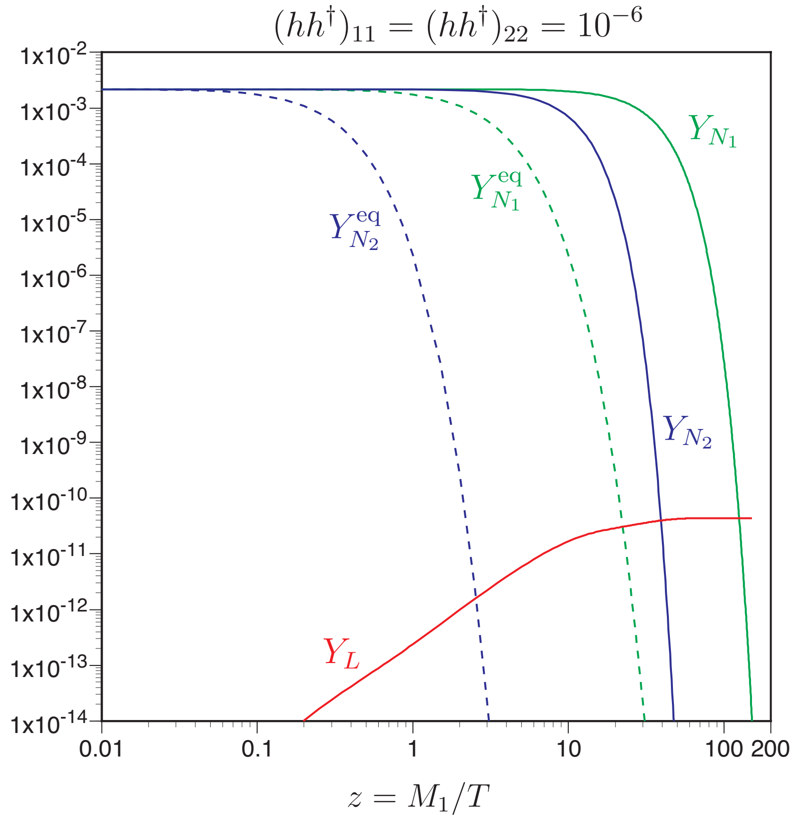
[See, Appendix of Buchmüller, et al., Ann. Phys. 315;
Kolb and Wolfram, Nucl. Phys. B172 ('80), for detail]

数値解の例

toy model with 2 flavors $\quad M_1 = 10^{-6} m_{\mathrm{Pl}}, \quad M_2/M_1 = 10, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-8}$

initial conditions: $\quad Y_N = Y_N^{\mathrm{eq}},\ Y_l = Y_{\bar{l}} = Y_l^{\mathrm{eq}},\ Y_\phi = Y_{\bar{\phi}} = Y_\phi^{\mathrm{eq}}$ $\quad$ at $z = M_1/T = 0.01$



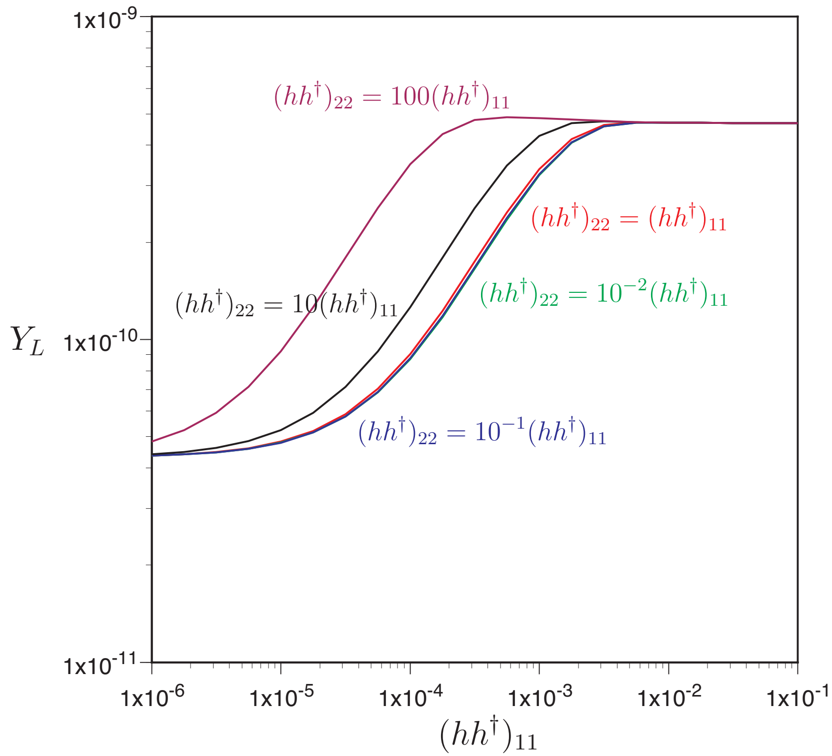


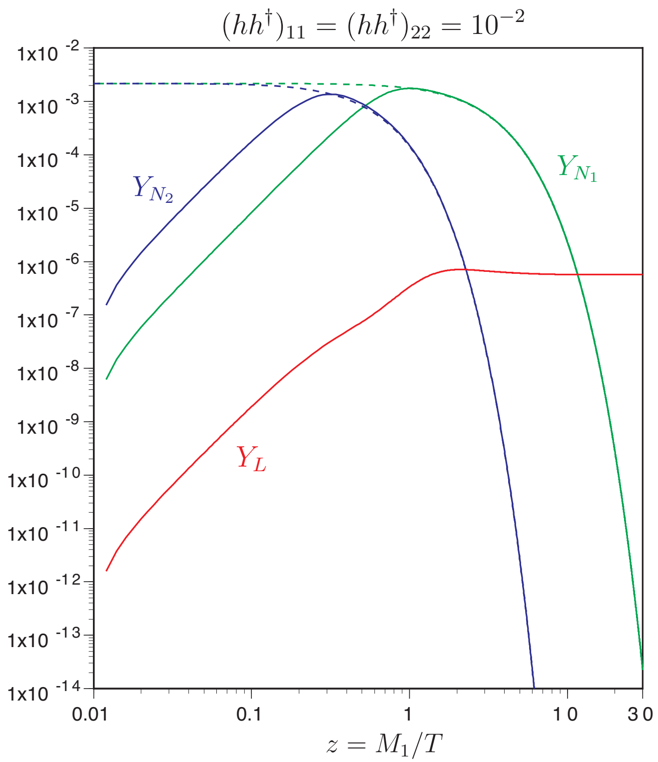
$Y_l, Y_{\bar{l}}, Y_\phi, Y_{\bar{\phi}}$は殆ど平衡状態の値のまま

$\simeq$ constant

最終的に生成されるLは

$(hh^\dagger)_{11}$と$(hh^\dagger)_{22}$の大きい方で決まる。 →





←

初期条件を$Y_N = 0$としても、

高温でNがまず生成される。

その際にもLを生成。

Seesaw模型での計算

- 生成されるLepton数 $\longleftarrow$ $\begin{cases} h_{ij} & \nu_L\text{と}N_R\text{のYukawa結合 --- CP violation} \\ M_i & \text{重いニュートリノの質量固有値} \end{cases}$

- ニュートリノの実験・観測 $\longleftarrow U_{MNS} \longleftarrow y_{ij}$ (l_Lとe_RのYukawa), h_{ij}, M_{ij}

  模型を制限すれば両者の関係が付けられる。

  ⋆ GUTs — lepton sector: $(y_{ij}, h_{ij}) \leftrightarrow$ quark sector: $(y^{(d)}, y^{(u)})$

  ⋆ (2,3)-model — 2つのN_iと3つのν_i [Endo, et al., Phys. Rev. Lett. 89 ('02)]

oscillation data : $h \sim O(1)$ならば、$M \sim 10^{14}$GeV $\quad m_\nu \sim (hv_0)^2/M$

$h \sim O(0.01)$ならば、$M \sim 10^{10}$GeV

十分小さいhに対しては $M < T_R$と出来るが...

e.g. weak scale MのEW leptogenesis [Hill, Murayama, Perez, hep-ph/0504248]

6. Discussions

宇宙のバリオン数、Dark Matter、Dark Energy

⇓

存在は明らかだが、説明できる決定的な理論がない

Beyond the SMは必須

New Physics前夜である今こそ、素粒子論的宇宙論に注目！

Baryogenesis, Leptogenesis関係で取組むべき問題

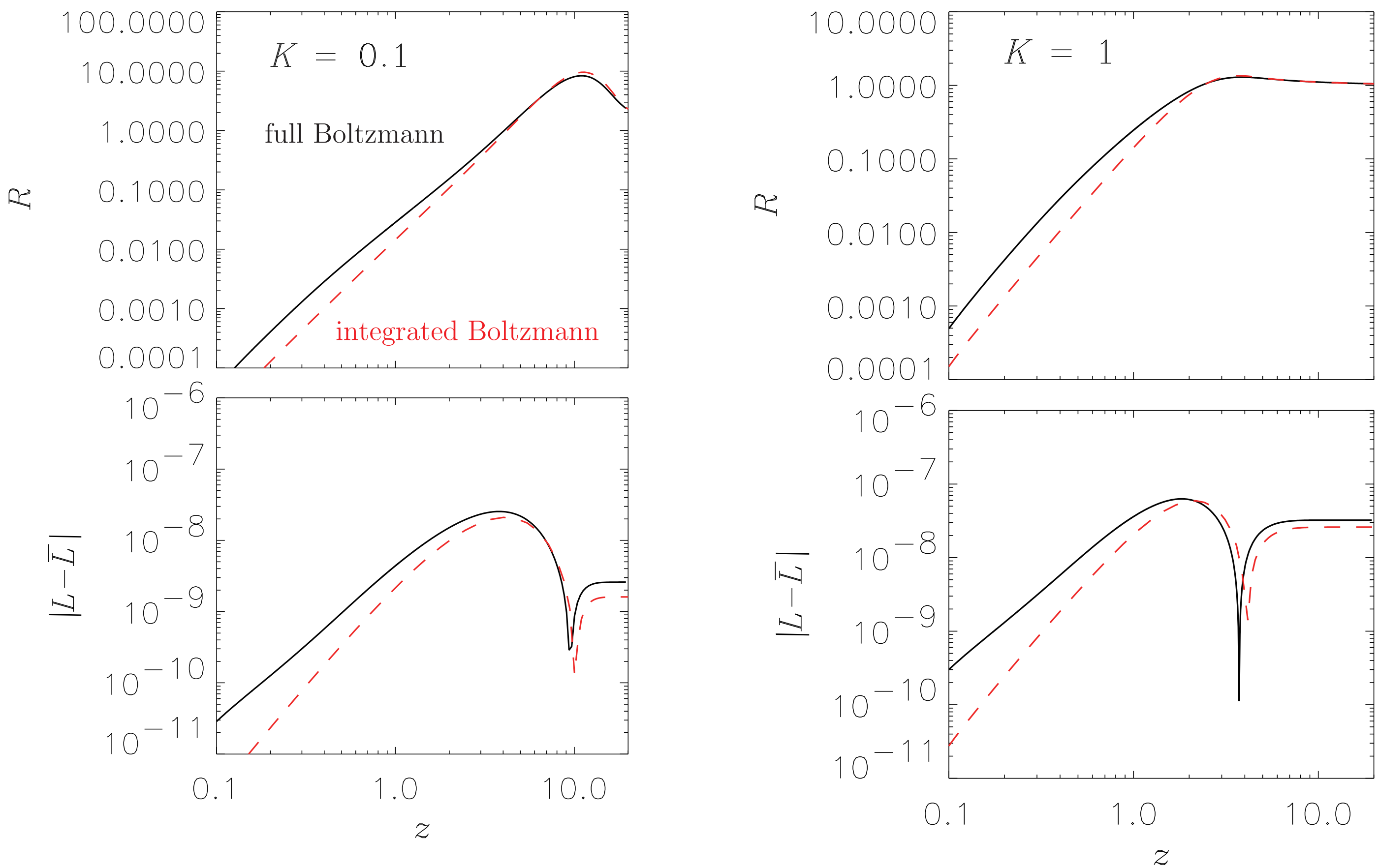
- ⋆ 電弱相転移 — 静的・動的振る舞い
- ⋆ **非平衡過程の取り扱い**
- ⋆ 現象論的制限をクリアした模型での実現
- ⋆ · · ·

Leptogenesis, GUTs baryogenesis, CDM abundance — spatially uniform system

従来の方法: Boltzmann equation $\Rightarrow$ 分布函数 $f(\boldsymbol{p},t) \longrightarrow \dfrac{n(t)}{n^{\rm eq}} f^{\rm eq}(\boldsymbol{p})$

"Full" Boltzmann equations

- Garayoa, Pastor, Pino, Rius and Vives, hep-ph/0905.4834
- Basbøll and Hannested, JCAP 0701 ('07) [hep-ph/0609025]



$$K = \frac{\Gamma(N \to l\phi)}{H(T = M_R)}$$

large K

$\Updownarrow$

large Yukawa coupling

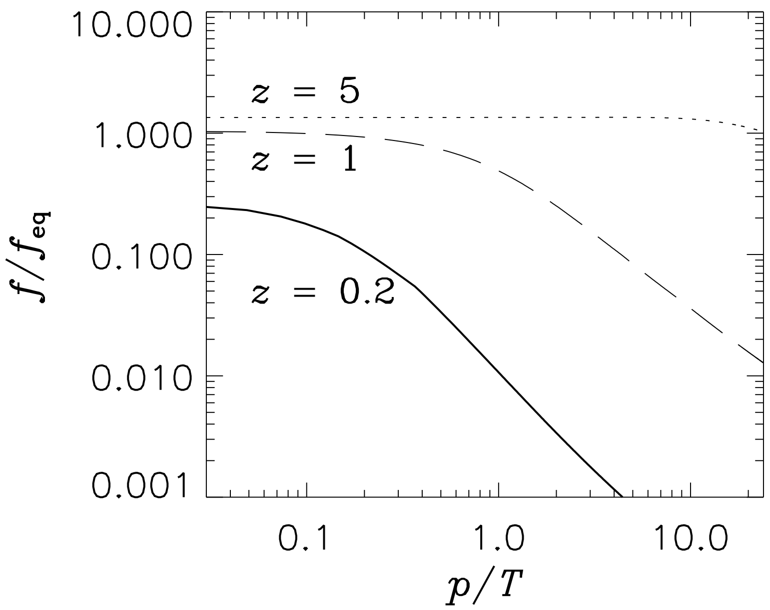
- For small K ($\simeq 0.1$): η_Lは, integrated Boltzmannの場合より50%増

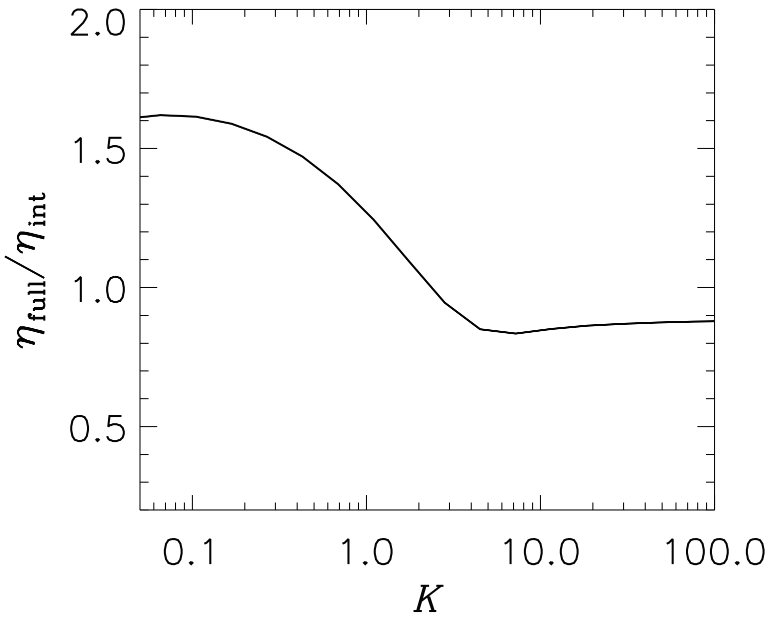
  彼らの解析に、$l\phi \leftrightarrow \bar{l}\bar{\phi}$過程が入っていないことが原因か

  $\longrightarrow$ effective for thermalization

- For $K \sim 1$: η_Lは, integrated Boltzmannの場合より30%増

- For $K > 1$: integrated Boltzmannとの差は高々15%





N_R分布函数の平衡分布との比

($K = 1$)

$\eta_L = \dfrac{n_L}{n_\gamma}$の$K$依存性

$\eta_{\rm full}$ by full Boltzmann

$\eta_{\rm int}$ by integrated Boltzmann

非平衡過程の取り扱いは種々の残存量の計算にEssential

GUTs & EW baryogenesis, Leptogenesis, CDM abundance, etc

formulations

- integrated Boltzmann equation
- full Boltzmann equation
- ⋆ Kadanoff-Baym equation
- · · ·

一般的な非平衡は難しいが、特定の問題なら適用可能

空間的に一様な系, 非平衡定常状態 (時間的に一様)

ご清聴、ありがとうございました。