運動量依存性を考慮した
レプトン数生成の解析

佐賀大学工学系研究科

船久保公一

富山大学　素粒子論セミナー

2014年９月12日

動機

初期宇宙のイベント

痕跡となる量を決めるのは非平衡過程

DM Abundance

Baryon Asymmetry

CMB Fluctuation

Gravitational Wave

....

非平衡状態の起源

空間の膨張

背景場の時間変化と見なせる

GUT-Baryogenesis　　Leptogenesis

Freeze-out of CDM

CMB anisotpropy　　evolution of the plasma

背景場の時間変化

空間的一様場　　Affleck-Dine BG

Preheating (parametric resonance)

空間的非一様場　　EW-Baryogenesis

Preheating (tachyonic)

非平衡状態の取り扱い

Classical equation of motion　　場の方程式の数値解

スファレロン遷移の数値解析　　tachyonic preheating

thermal & quantum fluctuationが取込めない

Boltzmann equation　　粒子の分布関数に対する微積分方程式

$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$

GUT-Baryogenesis　　Leptogensis　　DM abundance

現象論的方程式 — 第一原理導出されていない

空間的に非一様な場合は、数値解も困難

Kadanoff-Baym equation　　場の相関関数に対する微積分方程式

$\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \phi(t', \boldsymbol{x}') \rangle$　　Schwinger-Dyson eq.

第一原理導出可能

Boltzmann eq.に無いoff-shell & memory effects

Kadanoff-Baym eq.にある種の近似を適用することで、
Boltzmann eq.を導出可能

- on-shell limit
- derivative expansion

Boltzmann eq.の妥当性を検証するために、正確に解きたい。

用いられてきた仮定・近似（空間的に一様な場合）

$$f(t,\boldsymbol{p}) = \frac{n(t)}{n^{\mathrm{eq}}} f^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{p}) \longrightarrow$$ $n(t)$に対する微分方程式

終状態統計因子： $1 \pm f(t,\boldsymbol{p}) \longrightarrow 1$

衝突項は全ての相互作用を含まない（含めない）

Thermal Leptogenesisにおいて、
（一部の）仮定・近似の妥当性を検証する。

Full Boltzmann equation

heavy neutrinoが平衡状態から逸脱することが本質的

$$f_N(t,p_N) = \frac{n_N(t)}{n_N^{\rm eq}} f^{\rm eq}(p_N)$$ という仮定は許されるか？

$f_L(t,p_L),\ f_{\bar{L}}(t,p_L)$ gauge int.等のためkinetic equilibrium

$$f_L(t,p_L) \simeq \frac{1}{e^{(E_L-\mu(t))/T}+1} \qquad f_{\bar{L}}(t,p_L) \simeq \frac{1}{e^{(E_L+\mu(t))/T}+1}$$

references:
- Basboll and Hannestad, JCAP 0701-003 [hep-ph/0609025]
- Garayoa, et al., JCAP 0909-035 [hep-ph/0905.4834]
- Hahn-Woernle, Plumacher, Wong, JCAP 0908-028 [hep-ph/0907.0205]

Boltzmann eq.にerror, 散乱過程は一部だけ

Model:

L- and R-leptons in the 3-generation seesaw model

+ 3rd generation of the quarks

Assumption:

空間的一様性 $f_a(t, \boldsymbol{p}) = f_a(t, p)$ with $p = |\boldsymbol{p}|$

$M_1 \ll M_2,\ M_3$ Lightest heavy neutrinoだけの寄与を考える

quark, Higgs bosonsはmasslessの熱平衡分布

FRW時空でのBoltzmann方程式の一般形（一様空間）

$$\frac{\partial f_a(t,p)}{\partial t} - H(t)p\frac{\partial f_a(t,p)}{\partial p} = \frac{1}{2E_a}C[f_a] \qquad a = N_1,\ L_A,\ \bar{L}_A \quad (A = 1,2,3)$$

dimensionless variables: $z = M_1/T, \quad y_a = p_a/T, \quad \bar{E}_a = E_a/T$

$$\frac{\partial f_{N_1}(z,y_N)}{\partial z} = \frac{z}{2\bar{E}_N H(z=1)}\left(C^{\text{D-ID}}[f_{N_1}] + C^{|\Delta L|=1}[f_{N_1}]\right)$$

$$\frac{\partial f_{L_A}(z,y_L)}{\partial z} = \frac{z}{2\bar{E}_L H(z=1)}\left(C^{\text{D-ID}}[f_{L_A}] + C^{|\Delta L|=2}[f_{L_A}] + C^{|\Delta L|=1}[f_{L_A}]\right)$$

$$\frac{\partial f_{\bar{L}_A}(z,y_L)}{\partial z} = \frac{z}{2\bar{E}_{\bar{L}} H(z=1)}\left(C^{\text{D-ID}}[f_{\bar{L}_A}] + C^{|\Delta L|=2}[f_{\bar{L}_A}] + C^{|\Delta L|=1}[f_{\bar{L}_A}]\right)$$

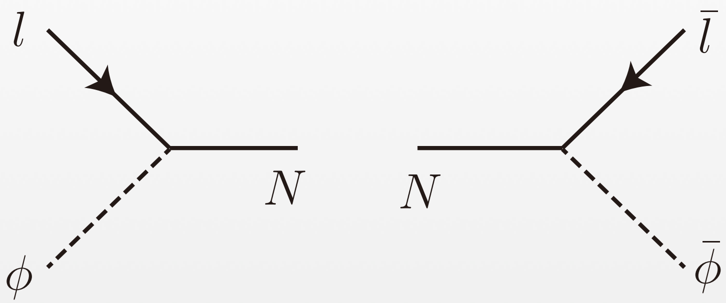
on-shell $|\Delta L| = 2$ scattering terms subtracted

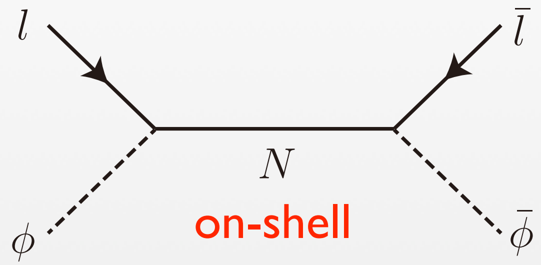
As for the lepton number distribution,

$$f_{\mathcal{L}_A}(z,y_L) \equiv f_{L_A}(z,y_L) - f_{\bar{L}_A}(z,y_L), \qquad f_{\mathcal{L}}(z,y_L) \equiv \sum_A f_{\mathcal{L}_A}(z,y_L)$$

Collision terms

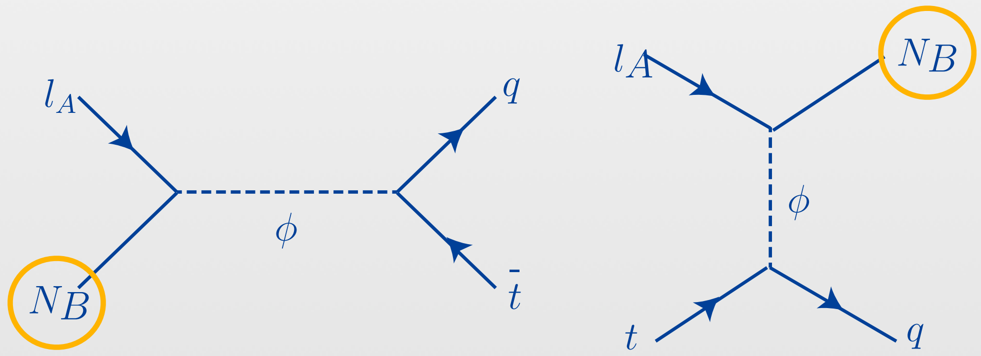
Decay-Inverse Decay



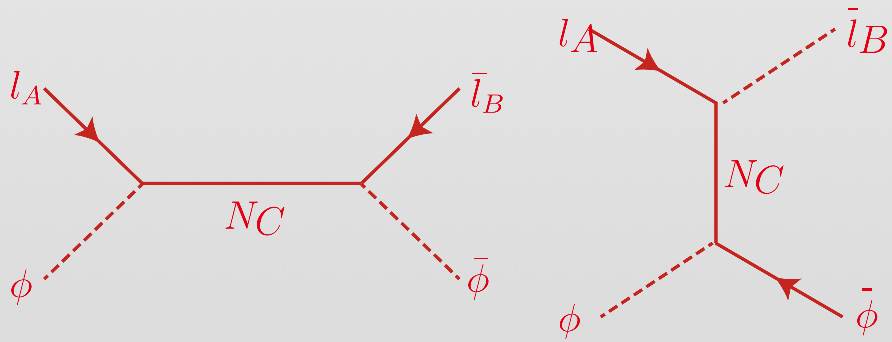


を引いておく

$|\Delta L| = 1$ scattering



$|\Delta L| = 2$ scattering



$$f_L(z,y) = \frac{1}{e^{(E_L-\mu(t))/T}+1} = \frac{1}{e^{(\bar{E}_L-\bar{\mu}(z))}+1} \qquad f_{\bar{L}}(z,y) = \frac{1}{e^{(\bar{E}_{\bar{L}}+\bar{\mu}(z))}+1}$$

として$\mu(z)$の1次まで。 $f_L(z,y_L)+f_{\bar{L}}(z,y_L) \simeq 2f_L^{\mathrm{eq}}(y_L)$

まず、D-IDのみ

heavy neutrino

$$\frac{\partial f_N(z,y_N)}{\partial z} = \frac{16\pi K z^2}{2\bar{E}_N}\int d\tilde{y}_H d\tilde{y}_L\,(2\pi)^4\delta^4(y_N-y_L-y_H)$$
$$\times\left[f_H^{\mathrm{eq}}(y_H)f_L^{\mathrm{eq}}(y_L)(1-f_N(y_N)) - f_N(y_N)(1+f_H^{\mathrm{eq}}(y_H))(1-f_L^{\mathrm{eq}})(y_L))\right]$$

leptons

$$\frac{\partial f_L(z,y_N)}{\partial z} = \frac{z}{2\bar{E}_N H(z=1)}C^{\text{D-ID}}[f_L, f_N],$$

$$\frac{\partial f_{\bar{L}}(z,y_N)}{\partial z} = \frac{z}{2\bar{E}_N H(z=1)}C^{\text{D-ID}}[f_{\bar{L}}, f_N]$$

$$C^{\text{D-ID}}[f_L, f_N] \sim \int d\tilde{y}_N d\tilde{y}_H\, (2\pi)^4 (y_N - y_L - y_H)$$
$$\times \left[f_N (1 - f_L)(1 + f_H^{\text{eq}})|A(N \to LH)|^2 - f_L f_H^{\text{eq}} (1 - f_N)|A(LH \to N)|^2 \right]$$
$$- S_{\text{os}}[f_L],$$

$$C^{\text{D-ID}}[f_{\bar{L}}, f_N] \sim \int d\tilde{y}_N d\tilde{y}_H\, (2\pi)^4 (y_N - y_L - y_H)$$
$$\times \left[f_N (1 - f_{\bar{L}})(1 + f_H^{\text{eq}})|A(N \to \bar{L}\bar{H})|^2 - f_{\bar{L}} f_H^{\text{eq}} (1 - f_N)|A(\bar{L}\bar{H} \to N)|^2 \right]$$
$$- S_{\text{os}}[f_{\bar{L}}]$$

lepton数のcollision termはこの２つの差

従来は、ここで**終状態統計因子を1にして差をとる**

$f_{\mathcal{L}} = f_L - f_{\bar{L}}$ に比例する項が欠落　　wash-out termを過小評価

$$S_{\rm os}[f_L, f_{\bar L}] \sim \int d\tilde{p_H} d\tilde{p}_{\bar L} d\tilde{p}_{\bar H} (2\pi)^4 (p_L + p_H - p_{\bar L} - p_{\bar H})$$
$$\times\Big[f_L f_H^{\rm eq}(1 - f_{\bar L})(1 + f_{\bar H}^{\rm eq})|M_{\rm os}(LH \to \bar L \bar H)|^2$$
$$- f_{\bar L} f_{\bar H}^{\rm eq}(1 - f_L)(1 + f_H^{\rm eq})|M_{\rm os}(\bar L \bar H \to LH)|^2 \Big]$$

ここでon-shell amplitudeは、Nのdecay amplitudeにより、

$$|M_{\rm os}(LH \to \bar L \bar H)|^2 = |A(LH \to N)|^2 \frac{\pi\delta(s - M^2)}{M\Gamma_N}|A(N \to \bar L \bar H)|^2 \simeq \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)^2 |A_D|^2 \frac{\pi\delta(s - M^2)}{M\Gamma_N}|A_D|^2,$$
$$|M_{\rm os}(\bar L \bar H \to LH)|^2 = |A(\bar L \bar H \to N)|^2 \frac{\pi\delta(s - M^2)}{M\Gamma_N}|A(N \to LH)|^2 \simeq \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)^2 |A_D|^2 \frac{\pi\delta(s - M^2)}{M\Gamma_N}|A_D|^2$$

Γ_Nはthermal decay width [Weldon, Phys. Rev. D 28, 2007]

$$\Gamma^{\rm th} = \frac{1}{2M}\int d\tilde{p}_L d\tilde{p}_H (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_L - p_H)|A_D|^2$$
$$\times \left[(1 - f_L^{\rm eq}(p_L))(1 + f_H^{\rm eq}(p_H)) + f_L^{\rm eq}(p_L) f_H^{\rm eq}(p_H) \right].$$

$$f_L(p_L) - f_{\bar{L}}(p_L) = f_{\mathcal{L}}(p_L), \qquad f_L(p_L) + f_{\bar{L}}(p_L) = f_L^{\rm eq}(p_L) + O(\epsilon^2)$$

を用いると、CP violationの１次までで、

$$\begin{aligned}
&S_{\rm os}[f_L, f_{\bar{L}}](p_L) - \bar{S}_{\rm os}[f_{\bar{L}}, f_L](p_L) \\
&= \frac{1}{2E_L}\int d\tilde{p}_H d\tilde{p}_{\bar{L}} d\tilde{p}_{\bar{H}} (2\pi)^4 \delta^4(p_L + p_H - p_{\bar{L}} - p_{\bar{H}}) |A_D|^2 \frac{\pi\delta(s - M^2)}{M\Gamma_N} |A_D|^2 \\
&\times \Bigg\{ -\epsilon \left[f_L^{\rm eq}(p_L) f_H^{\rm eq}(p_H) \underline{(1 - f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}))(1 + f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}}))} + \underline{f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}) f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})} (1 - f_L^{\rm eq}(p_L))(1 + f_H^{\rm eq}(p_H)) \right. \\
&\qquad + \frac{1}{4} \left[f_{\mathcal{L}}(p_L)(1 - f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}})) + f_L^{\rm eq}(p_L) f_{\mathcal{L}}(p_{\bar{L}}) \right] f_H^{\rm eq}(p_H)(1 + f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})) \\
&\qquad + \frac{1}{4} \left[f_{\mathcal{L}}(p_{\bar{L}})(1 - f_L^{\rm eq}(p_L)) + f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}) f_{\mathcal{L}}(p_L) \right] f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})(1 + f_H^{\rm eq}(p_H)) \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\underline{f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}) f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})} = f_f^{\rm eq}(E_{\bar{L}} + E_{\bar{H}}) \left[(1 - f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}))(1 + f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})) + f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}) f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}}) \right]$$

$$\underline{(1 - f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}))(1 + f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}}))} = e^{(E_{\bar{L}} + E_{\bar{H}})/T} f_f^{\rm eq}(E_{\bar{L}} + E_{\bar{H}}) \left[(1 - f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}))(1 + f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}})) + f_L^{\rm eq}(p_{\bar{L}}) f_H^{\rm eq}(p_{\bar{H}}) \right]$$

を使い、次の積分を挿入： $1 \equiv \int d^4 p_N \, \delta^4(p_N - p_L - p_H)$

$|A_D|^2$を含む一部をΓ_Nで書き換え

まとめると、

Nに対するBEの解

$$
\begin{aligned}
\frac{H(z=1)}{z}\frac{\partial f_{\mathcal{L}}(z,y_L)}{\partial z}
&= \frac{|A_D|^2}{2T}\frac{\epsilon}{2E_L}\int d\tilde{y}_N d\tilde{y}_H (2\pi)^4\delta^4(y_N - y_L - y_H) \\
&\qquad \times \left[(1-f_L^{\rm eq}(y_L))(1+f_H^{\rm eq}(y_H)) - f_H^{\rm eq}(y_H) f_L^{\rm eq}(y_L)\right]\boxed{\left(f_N(y_N) - f_N^{\rm eq}(y_N)\right)} \\
&\quad - \underline{\frac{|A_D|^2}{2T}\frac{f_{\mathcal{L}}(y_L)}{4\bar{E}_L}}\int d\tilde{y}_N d\tilde{y}_H (2\pi)^4\delta^4(y_N - y_L - y_H)\boxed{\left(f_N(y_N) - f_N^{\rm eq}(y_N)\right)}
\end{aligned}
$$

レプトン数生成

wash out

数値解析

- Heavy neutrino分布関数の時間依存性
- full vs integrated Boltzmann eqs.の比較
- ２種類のレプトン数非保存散乱過程の効果

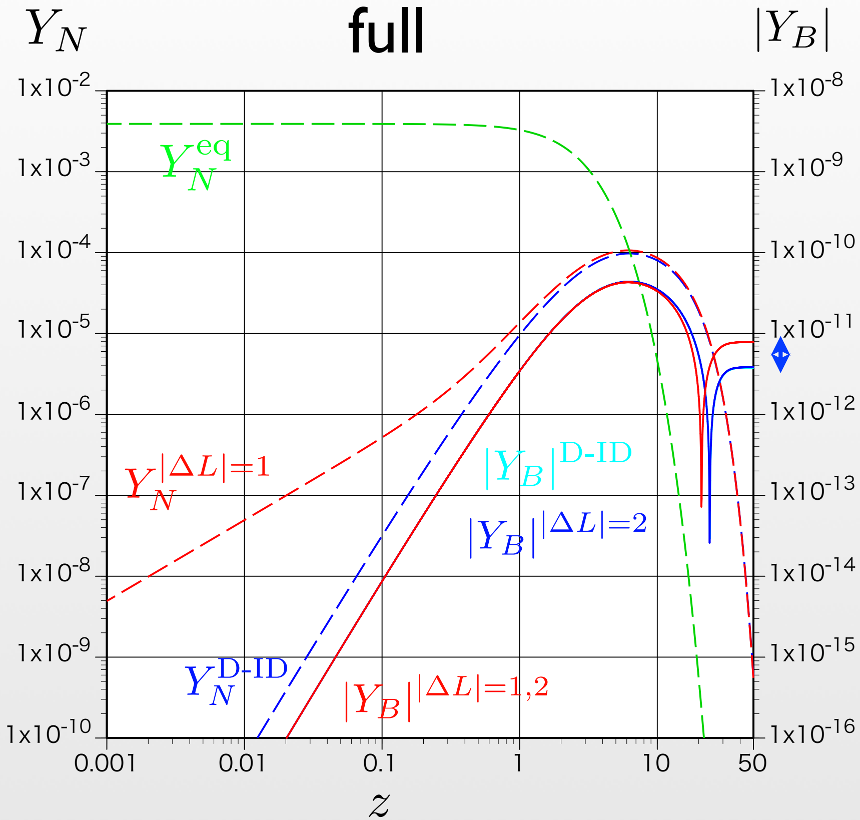
2-body scatt.は終状態統計因子を1

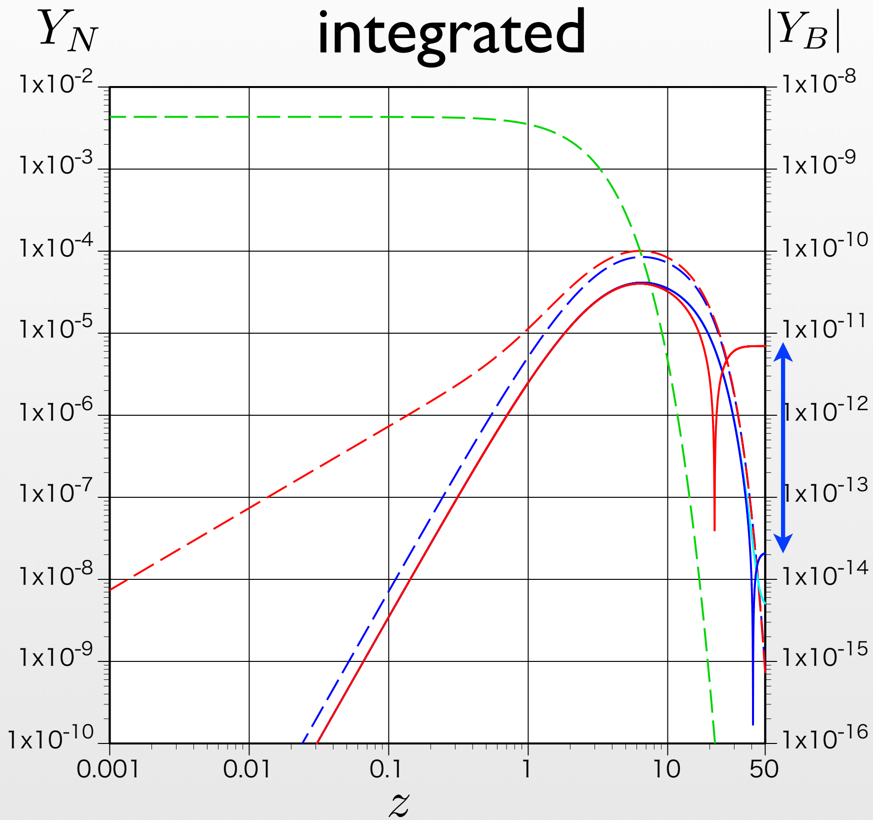
fixed input parameters:

$$M = 10^{10}\mathrm{GeV} \qquad \epsilon = 10^{-6} \qquad y_t = \frac{\sqrt{2}\, m_t}{v_0} = 1.00 \quad (m_t = 174\mathrm{GeV})$$

$K = 10^{-3} - 10^{2}$ の範囲でBoltzmann eqs.の数値解

$K = 0.01$



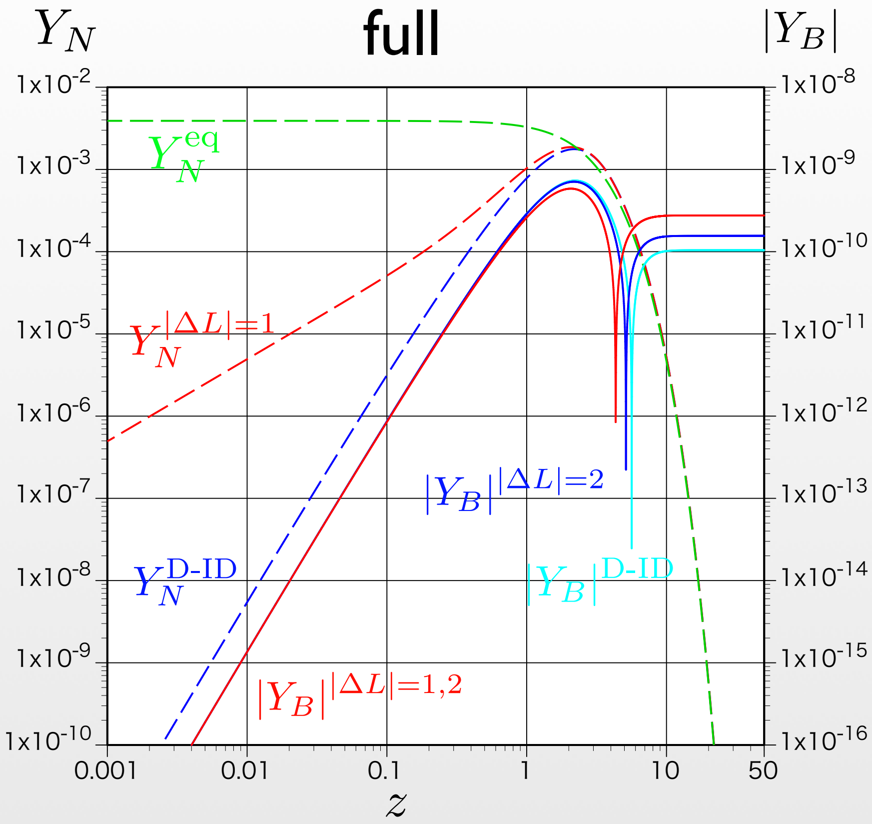


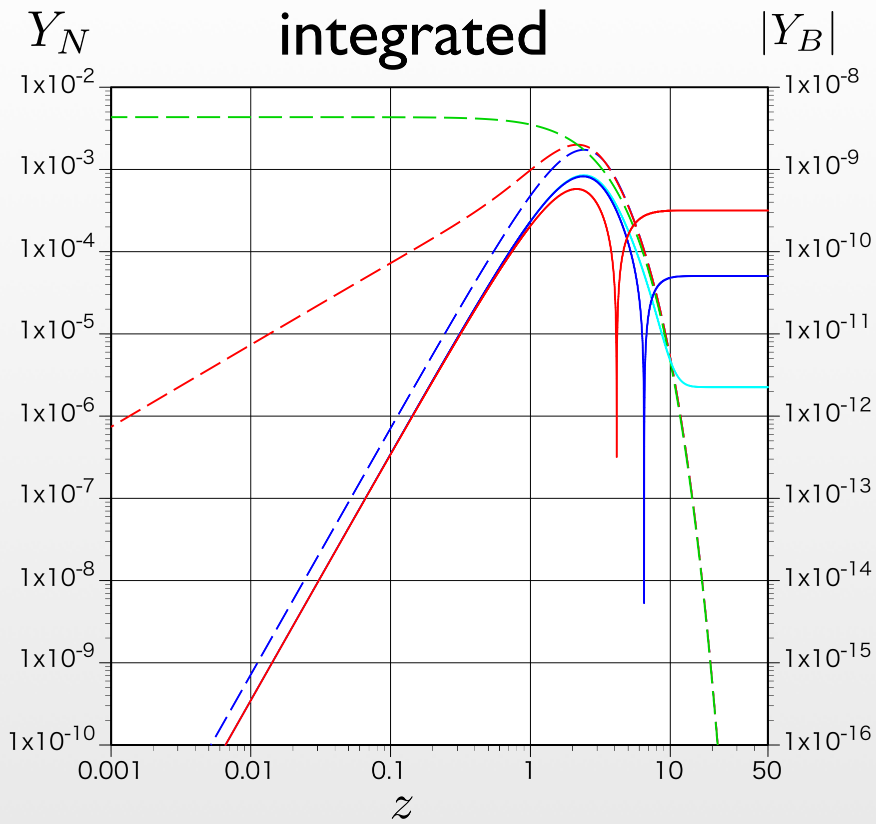
$|\Delta L| = 1$の過程はY_Nにも効くが、$|\Delta L| = 2$の過程はLのwashoutにだけ効く。

$|\Delta L| = 1$の過程は初期のheavy neutrino生成に大きく寄与する。

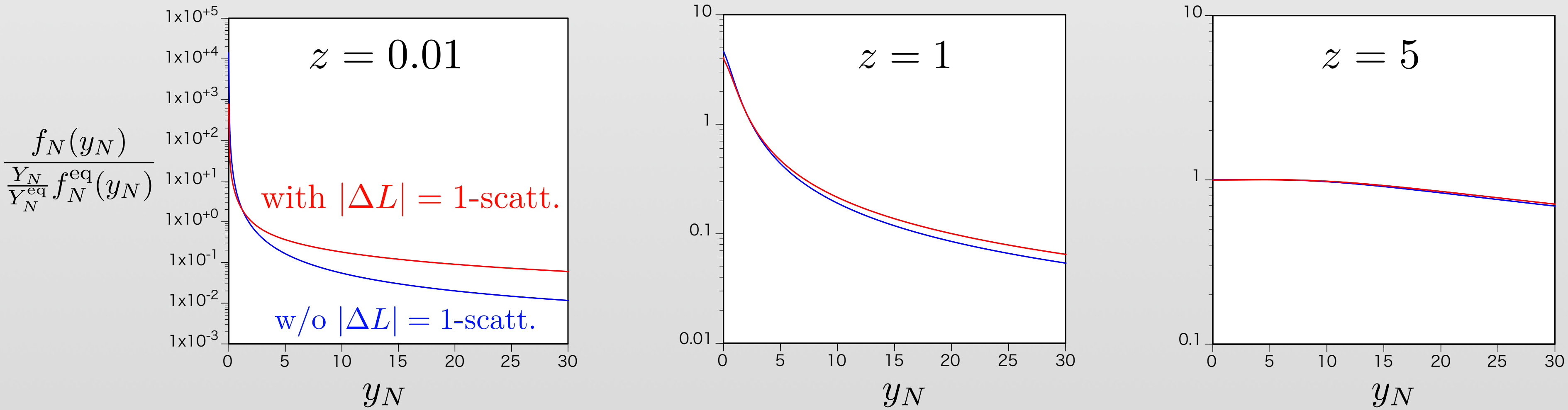
D-IDのみを考慮したintegrated BEのY_Bは符号の反転さえしない。

$K = 1$

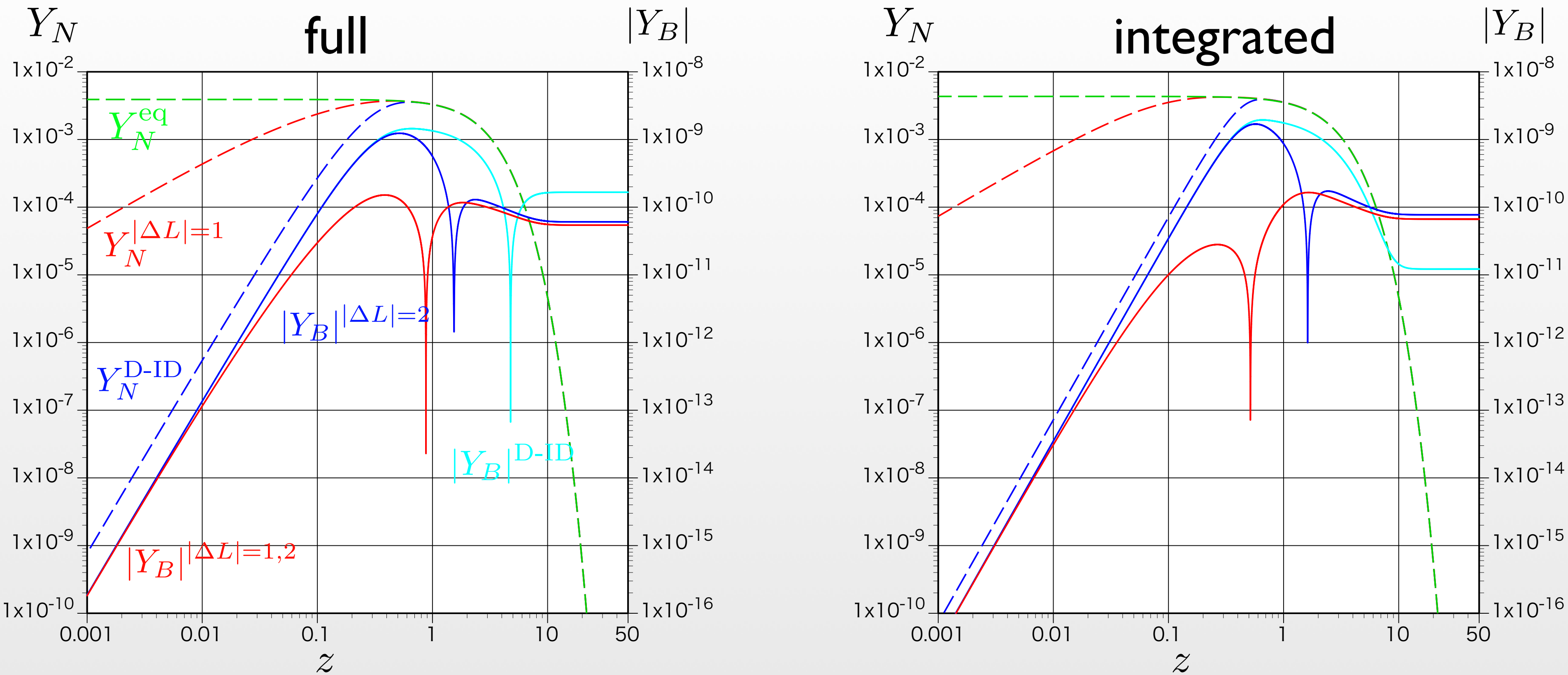




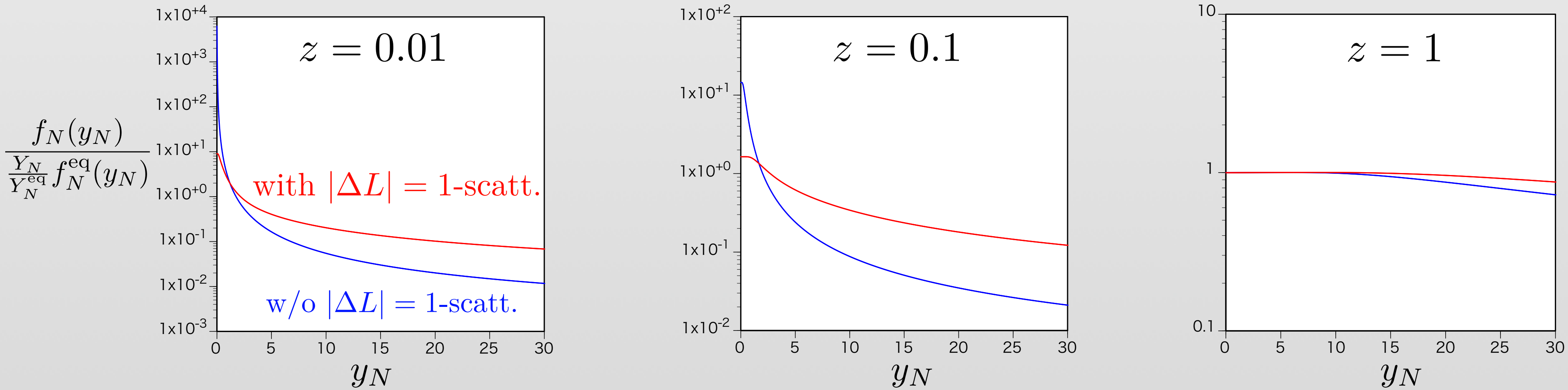
evolution of the heavy-ν distribution function



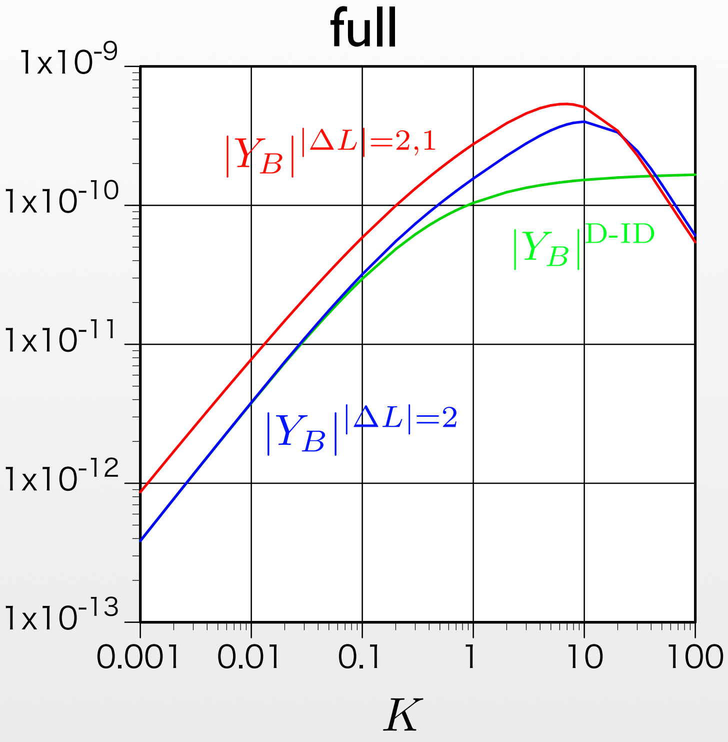
$K = 100$

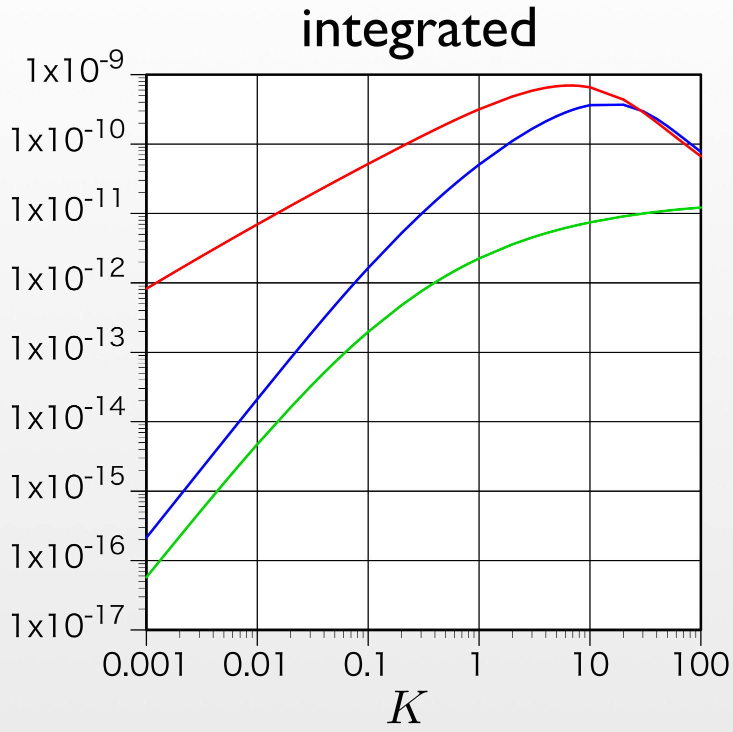


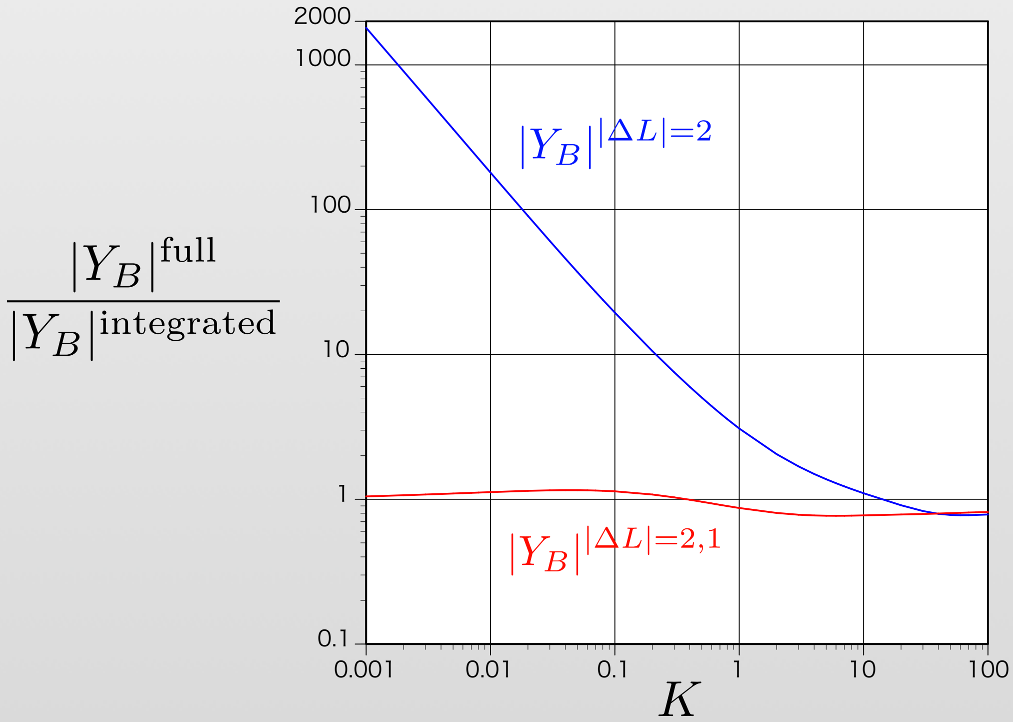
evolution of the heavy-ν distribution function



value of the final $|Y_B|$







一般にKが小さい方が非平衡性が強いため、full BEとintegrated BEの解の差は大きい。

逆に、K>50では両者が生成するレプトン数の差は無視できる。
分布関数の時間発展は異なるが、最終的なレプトン数には効かない。

$|\Delta L| = 1$ の散乱過程は、heavy neutrinoを平衡分布に、より早く近づけ、レプトン数のwashoutにも寄与する。

崩壊-逆崩壊(onshell-scatt.-subtracted)のみを含むintegrated BEの解はKが大きい場合でも信頼できない。

K>100の場合、散乱過程によるwashout効果が大きく、生成されるレプトン数がBAUを説明できなくなる。

$$\Gamma_{\rm sph}^{\rm (sym)}(T) > H(T) \quad \text{for } \underline{T_{EW} < T < 10^{12}\text{GeV}}$$

この範囲で$|\Delta L| \neq 0$過程が化学平衡 $\longrightarrow$ $B = L = 0$

おわりに

Boltzmann方程式は初期宇宙の**非平衡現象**の解析に用いられてきた。

GUT-baryogenesis, Leptogenesis, DM abundance, ...

Leptogenesisの解析でよく用いられてきたintegrated BEの近似が妥当となる場合を示した。

種々の相互作用の取込み
非平衡性の見極め

今後の課題

- ☆ Leptogenesis以外の問題への適用
- ☆ Boltzmann方程式が使えないケース --- resonant Leptogenesis
- ☆ Boltzmann方程式で見落とした効果

off-shell, memory effects (CTP formalism might work)

ご清聴、ありがとうございました。