

宇宙のバリオン数生成

佐賀大学理工学部
船久保公一

集中講義@京産大、益川塾

2011年2月17,18日

Introduction

相対論的局所場の理論

CPT定理の帰結

すべての粒子には、
同質量・同スピン・逆電荷の反粒子が存在

粒子 = 反粒子 光子, Z^0 , H^0 , ...

素粒子の基本法則

粒子と反粒子の入れ替えについて

「ほとんど」対称的

C, CP対称性

観測的事実

宇宙には物質しか存在しない

地球・月・太陽系

天の川銀河

天の川からの宇宙線

$$\frac{\text{反陽子}}{\text{陽子}} = 10^{-4}$$

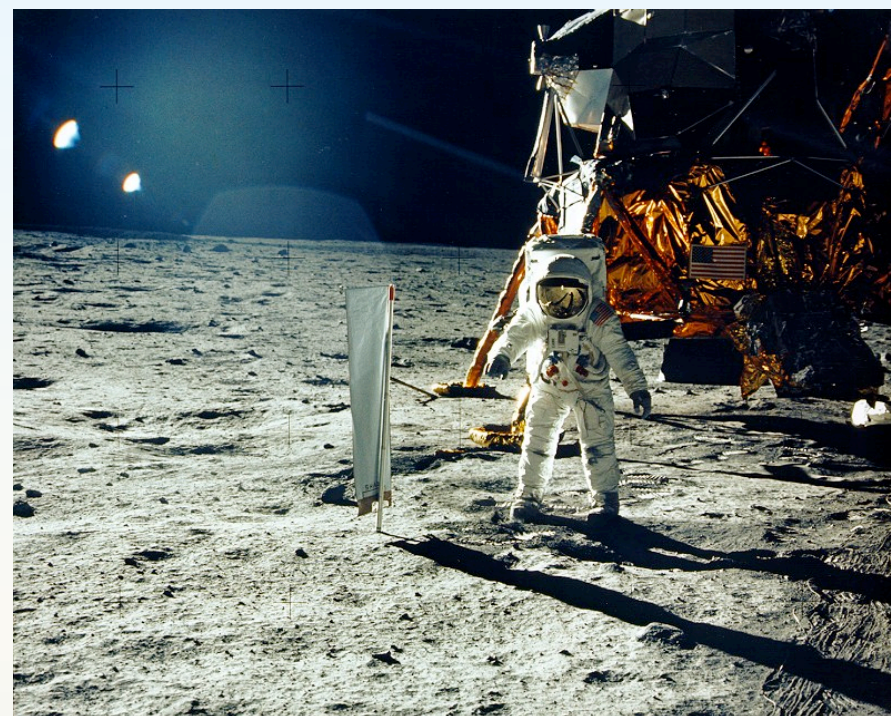
2次粒子とconsistent

銀河・銀河団

遠方の銀河が反物質でできている可能性

宇宙論的に厳しい

(後述)



Steigman, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 14 ('76)

バリオン数非対称性

$$\frac{n_B}{s} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s} = (0.67 - 0.92) \times 10^{-10}$$

この値の決め方は後述

バリオン数の変化、エントロピー生成が
無ければ宇宙の膨張によらずに一定

☆ 宇宙の初期条件

人間原理

Inflation後の再加熱期のentropy生成によりリセット

☆ バリオン数生成

宇宙の時間発展の過程で生成された
素粒子物理と宇宙論を用いて説明する

講義のプラン

- ビッグバン宇宙論の概要
- バリオン数生成のシナリオ
- スファレロン過程
- 電弱バリオン数生成
- レプトン数生成
- まとめと展望

outline

有限温度の場の理論

Boltzmann方程式

ビッグバン宇宙論の概要

Friedmann-Robertson-Walker時空 一様・等方空間

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2 a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

スケール因子

曲率パラメータ

現在 $a(t_0) = 1$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{closed} \\ 0 & \text{flat} \\ -1 & \text{open} \end{cases}$$

Einstein方程式

Friedmann方程式

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r(t) + \rho_m(t) + \rho_\Lambda) - \frac{k}{R_0^2 a^2} \quad \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Hubbleパラメータ

エネルギー保存則: $\frac{d}{dt} (\rho(t)a(t)^3) = -P(t) \frac{d}{dt} (a(t)^3)$

状態方程式: $P(t) = w\rho(t)$ $\left\{ \begin{array}{ll} w = \frac{1}{3} & \text{放射} \quad \rho_r(t) \propto a(t)^{-4} \\ w = 0 & \text{物質} \quad \rho_m(t) \propto a(t)^{-3} \\ w = -1 & \text{真空(DE)} \quad \rho_\Lambda(t) \propto a(t)^0 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_0^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(\frac{\rho_r(t_0)}{a^4} + \frac{\rho_m(t_0)}{a^3} + \rho_\Lambda \right) - \frac{k}{R_0^2 H_0^2 a^2} \\ &= \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0} - \frac{K_0}{a^2} \end{aligned}$$

臨界密度 $\rho_{C0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

時期(a)により優勢な成分が変わる

$K_0 = \Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} - 1$ の符号で宇宙の「形」が決まる
密度パラメータ

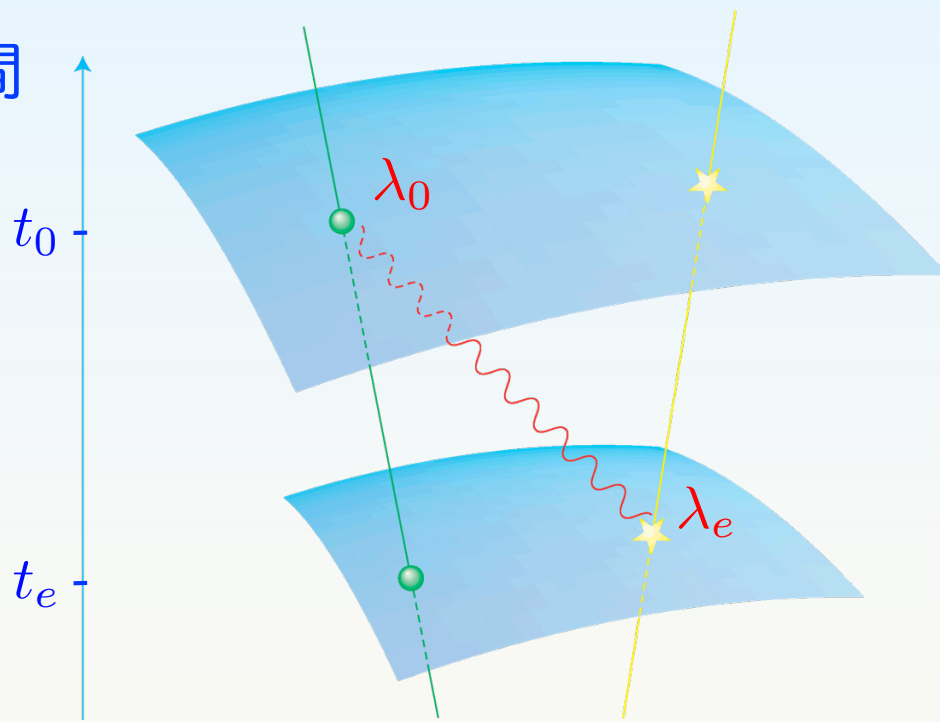
$H_0 = 100h$ km/s/Mpc 唯一の次元を持つパラメータ

$$h = 0.742 \pm 0.036$$

密度パラメータの決定

- 遠方の超新星($z > 0.1$)の赤方偏移と光度距離
- 宇宙背景放射の揺らぎの相関

時間



$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

赤方偏移

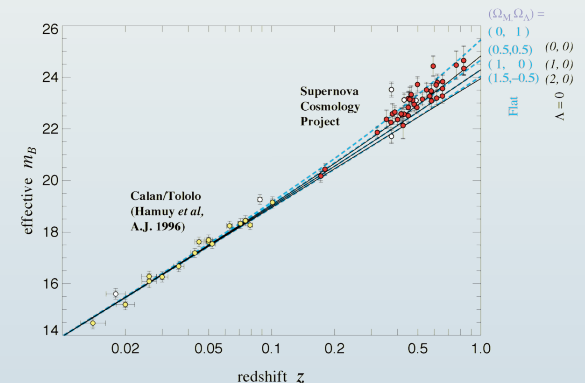
高精度

多数の天体について z と t_e の関係 \longrightarrow $a(t)$ の関数形

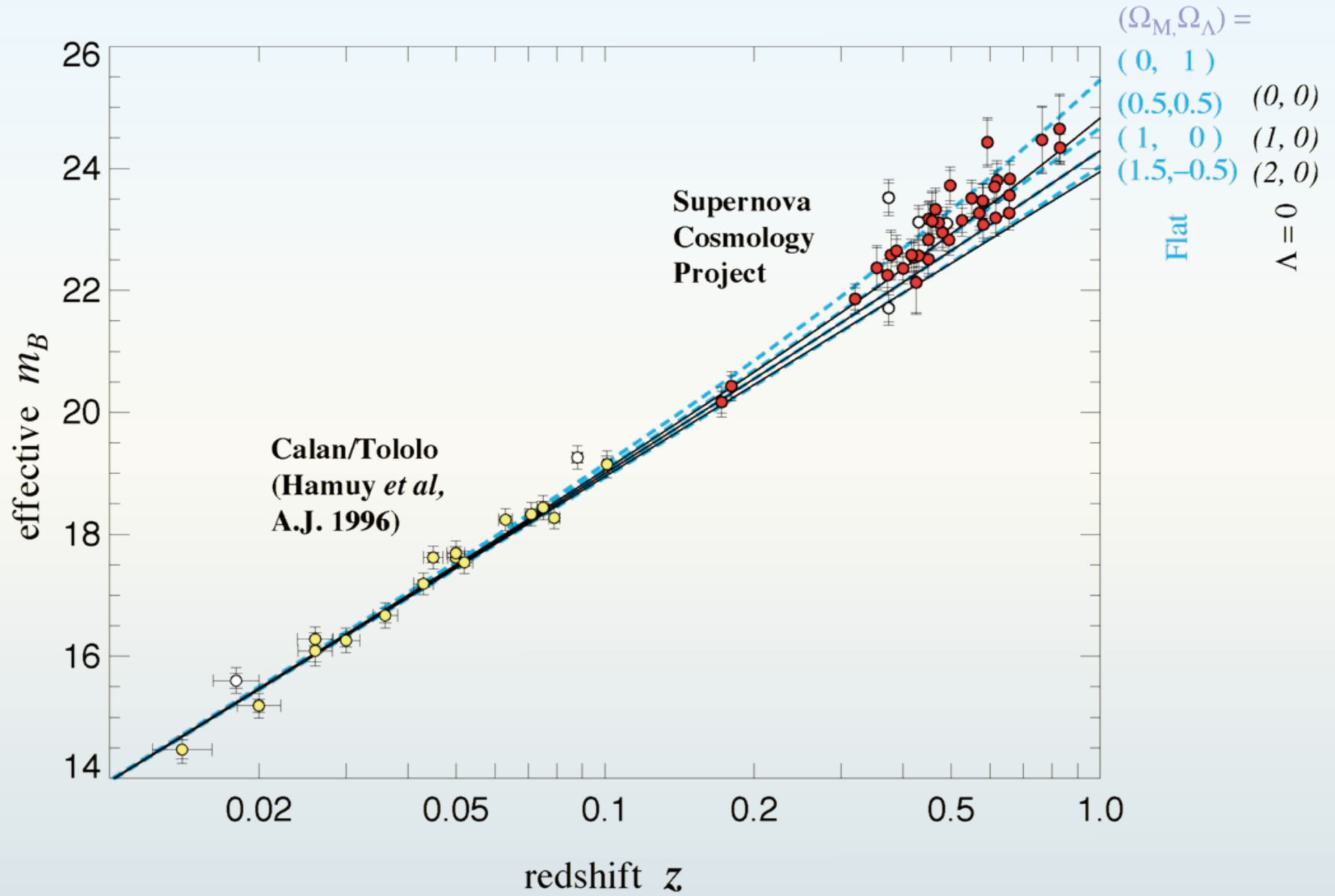
いつ星を出た光か？

平坦定常時空なら距離 = 時間

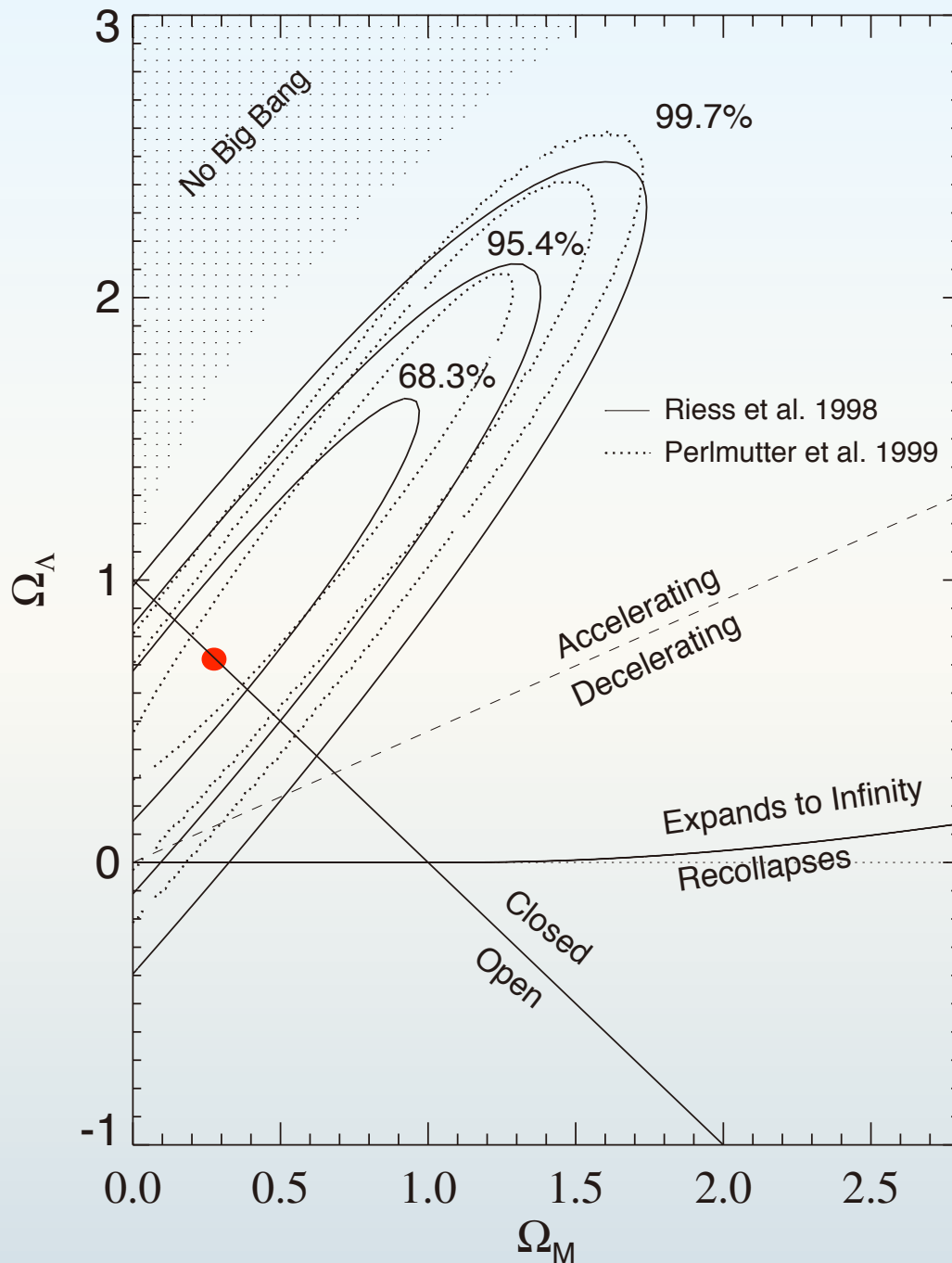
赤方偏移と星までの光度距離の関係が
宇宙論的パラメータに依存



光度距離



S. Perlmutter, et al., *Astrophys.J.* 517 (1999)



95%以上の確率で

$$\Omega_{\Lambda} \neq 0$$

最も確からしい
密度パラメータ

宇宙が平坦なら

$$\Omega_{\Lambda} \simeq 0.7$$

$$\Omega_m \simeq 0.3$$

宇宙背景放射の温度揺らぎ

Dodelson, Modern Cosmology

$h, \Omega_m h^2, \Omega_B h^2, \Omega_\Lambda, \dots$ をパラメータとして、

光子脱結合前後の、
一様分布関数からの揺らぎの発展

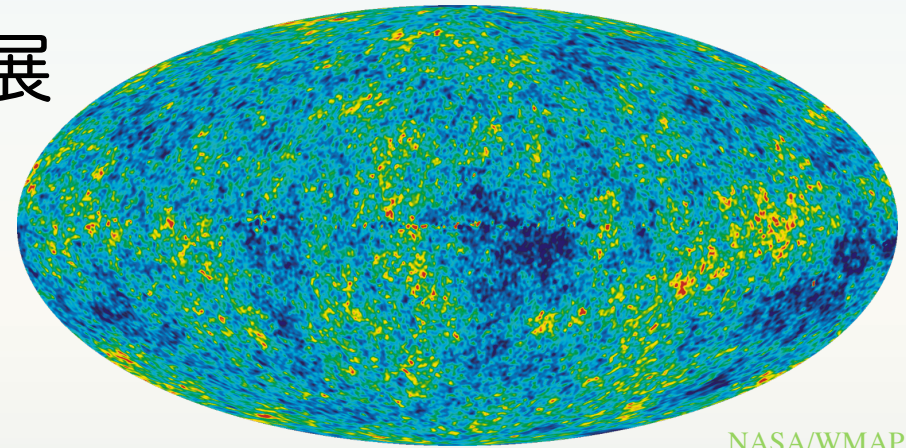
光子の温度揺らぎの相関

$$\left\langle \frac{\delta T(\mathbf{x})}{T} \frac{\delta T(\mathbf{y})}{T} \right\rangle$$

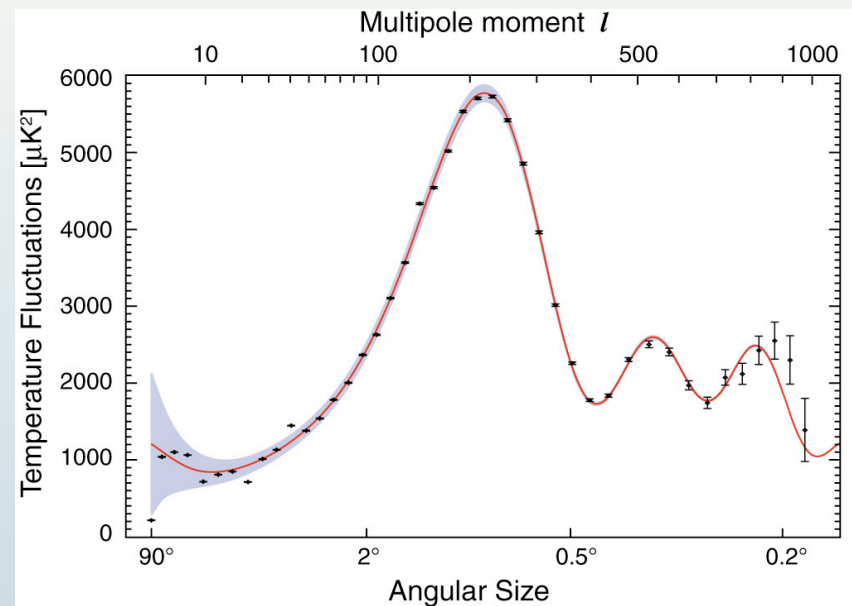
Fourier trf.

$$C_l$$

$$l \text{ vs } \sqrt{\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}}$$



NASA/WMAP project



WMAP7 best fit

<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/>

$$h = 0.710 \pm 0.025$$

$$\Omega_{\Lambda} = 0.734 \pm 0.029$$

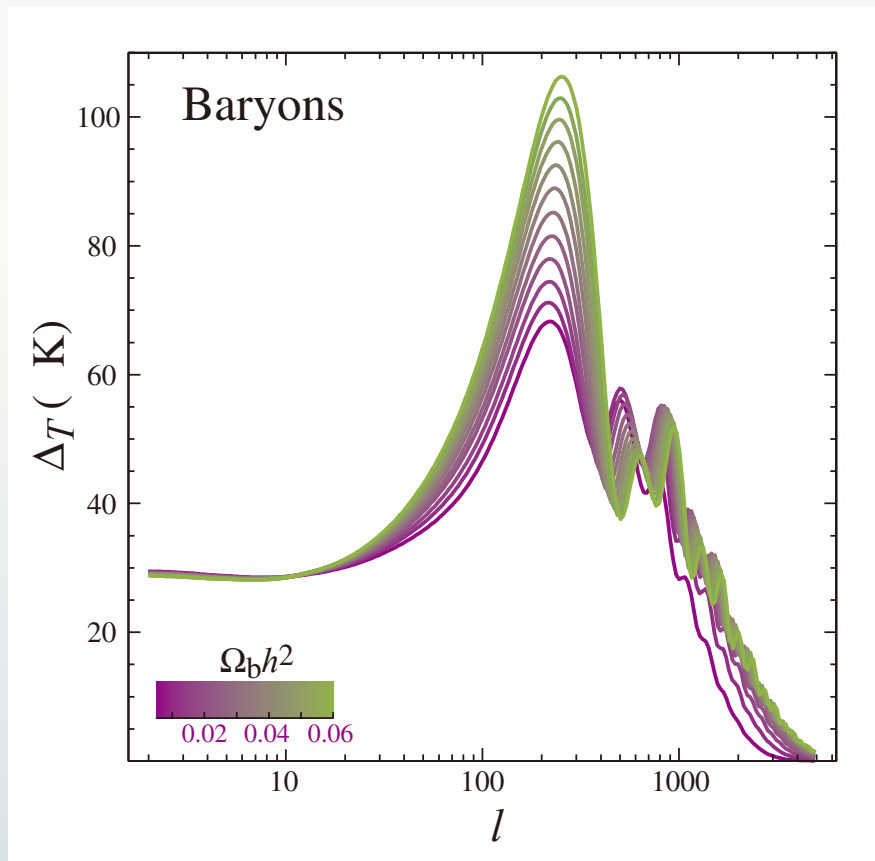
$$\Omega_m h^2 = 0.1334^{+0.0056}_{-0.0055}$$

$$\Omega_B h^2 = 2.258^{+0.057}_{-0.056} \times 10^{-2}$$

$$\Omega_B = 0.0449 \pm 0.0028$$

$$\Omega_{CDM} = 0.222 \pm 0.026$$

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_C} = \frac{m_p n_B}{\frac{3H_0^2}{8\pi G}}$$



Hu and Dodelson, astro-ph/0110414

ビッグバン元素合成

Thermal History of the Universe

粒子数密度 $n = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)} \mp 1} \stackrel{m, \mu \ll T}{\simeq} g \left\{ \frac{1}{3/4} \right\} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$

エネルギー密度 $\epsilon = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_p}{e^{(\epsilon_p - \mu)} \mp 1} \stackrel{m, \mu \ll T}{\simeq} g \left\{ \frac{1}{7/8} \right\} \frac{\pi^2}{30} T^4$

エントロピー密度 $s \simeq g \left\{ \frac{1}{7/8} \right\} \frac{2\pi^2}{45} T^3$

$$s \simeq \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 = \frac{2\pi^2}{45} \left(\sum_B g_B(T) + \frac{7}{8} \sum_F g_F(T) \right) T^3$$


断熱膨張

$$g_{*S} T^3 a^3 = \text{const.}$$

膨張宇宙と統計力学

空間の膨張率 $H(T) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Big|_T < \Gamma_A(T)$ 過程Aの反応率

反応の断面積
関与する粒子の密度



過程Aは**化学平衡**

chemical equilibrium

kinetic equilibrium

初期宇宙ではphotonと同じ温度

宇宙が冷えると 電子は電磁相互作用によりkinetic equil.にあっても、

Yukawa int.がchemical equil.でなくなる

ある過程や粒子が平衡から外れること = **脱結合**(decoupling)

温度とイベント

光子の脱結合

$$T_{\text{dec}} \simeq 0.26\text{eV}$$

$$\Gamma_{\gamma} = n_e \sigma_T = H(T_{\text{dec}})$$

Thomson cross section

放射・物質等価期

$$T_{\text{eq}} \simeq 5.5 \Omega_{m0} h^2 \text{eV}$$

$$\rho_m(T_{\text{eq}}) = \rho_r(T_{\text{eq}})$$

元素合成

$$T = (10 - 0.1)\text{MeV}$$

ニュートリノ脱結合

$$T \simeq 1\text{MeV}$$

$$\Gamma_{\nu} = n \sigma |v| \simeq G_F^2 T^5 = H(T)$$

QCD相転移

$$T \simeq (100 - 300)\text{MeV}$$

閉じ込め-非閉じ込め、

カイラル対称性の自発的破れ

電弱相転移

$$T \simeq 100\text{GeV}$$

電弱ゲージ対称性の自発的破れ

$$H(T) \simeq 1.66 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}}$$

軽元素合成

宇宙初期に陽子・中性子から合成される軽元素量が予言される

$$T \gg 1\text{MeV}$$

$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-$ $n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e$ 等が化学平衡

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq e^{-Q/T} \simeq 1 \quad Q \equiv m_n - m_p = 1.29\text{MeV}$$

$$T \simeq 1\text{MeV}$$

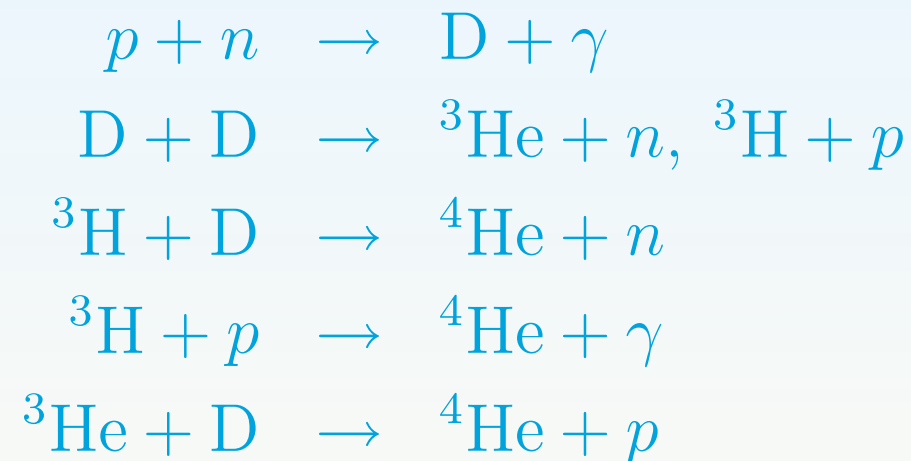
$$\Gamma_{n \leftrightarrow p} \simeq H(T)$$

反応が凍結

$$\left(\frac{n_n}{n_p} \right)_{\text{freeze-out}} \simeq 0.167$$

この後、 β 崩壊で中性子が少しずつ減少

$T \simeq 0.1\text{MeV}$ 軽元素合成が進む



核子結合エネルギー		
	E_B (MeV)	E_B/A (MeV)
D	2.22	1.11
${}^3\text{H}$	6.92	2.31
${}^3\text{He}$	7.72	2.57
${}^4\text{He}$	28.3	7.08

${}^4\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Li}$ 等により、 ${}^7\text{Li}$ まで合成

残っている中性子は、ほとんど全て ${}^4\text{He}$ に取り込まれる。

最終的な軽元素の量は、合成時の中性子の数で決まる。

$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma}$ が大きい \rightarrow 中性子が多い状態で元素合成

詳細は、Boltzmann方程式を解いて

4Heの質量比

$$Y = \frac{(2m_p + 2m_n)n_n/2}{m_p n_p + m_n n_n}$$

$$= \frac{2n_n/n_p}{1 + n_n/n_p}$$

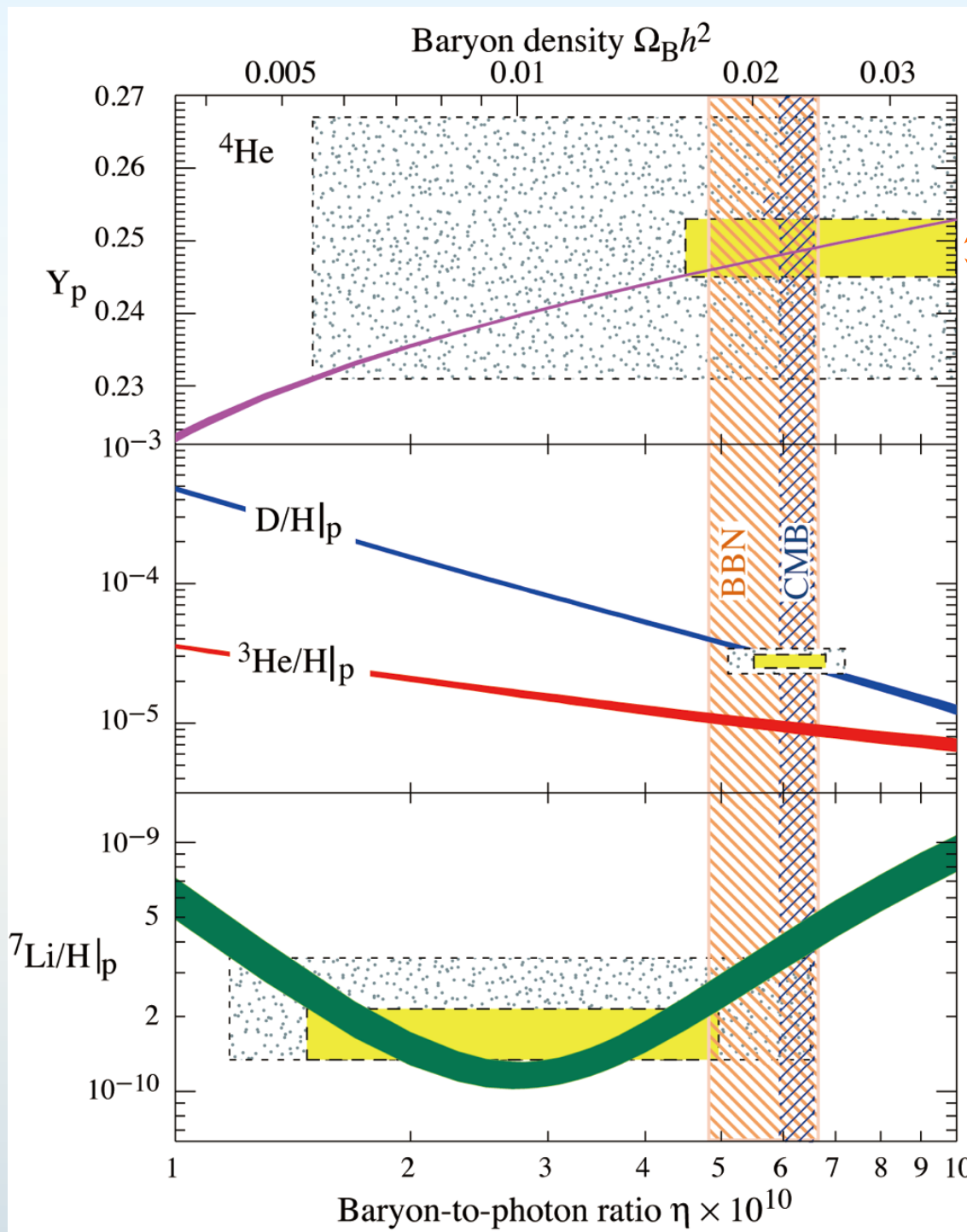
$$\frac{n_n}{n_p} = 0.13 \Rightarrow Y = 0.23$$

元素合成期までに

$$\eta = (4.7 - 6.5) \times 10^{-10} \quad {}^7\text{Li}/\text{H}|_p$$

が必要

$$s = 7.04n_\gamma$$



観測値
(95%CL)

バリオン対称宇宙において

銀河スケールで $\frac{n_B}{s} \sim \pm 10^{-10}$ である可能性は？

軽元素の存在比の観測だけからは否定できない

$T \gg 1 \text{ MeV}$ では、**熱的揺らぎ**で核子・反核子が同数存在

$$\frac{n_b}{s} = \frac{n_{\bar{b}}}{s} = 8 \times 10^{-11} \quad \text{at } T = 38 \text{ MeV}$$

この時、地平線スケール内の全エネルギー $10^{-7} M_{\odot}$
 $\sim H(T)^{-1}$

銀河団の質量 $10^{12} M_{\odot}$



宇宙は元素合成までに

バリオン非対称でなければならない！

インフレーション

- 地平線問題・平坦性問題の解決
- 密度揺らぎの起源

指数関数的膨張後の**再加熱**

ビッグバン宇宙の全エントロピーを生成

バリオン数非対称性は希釈

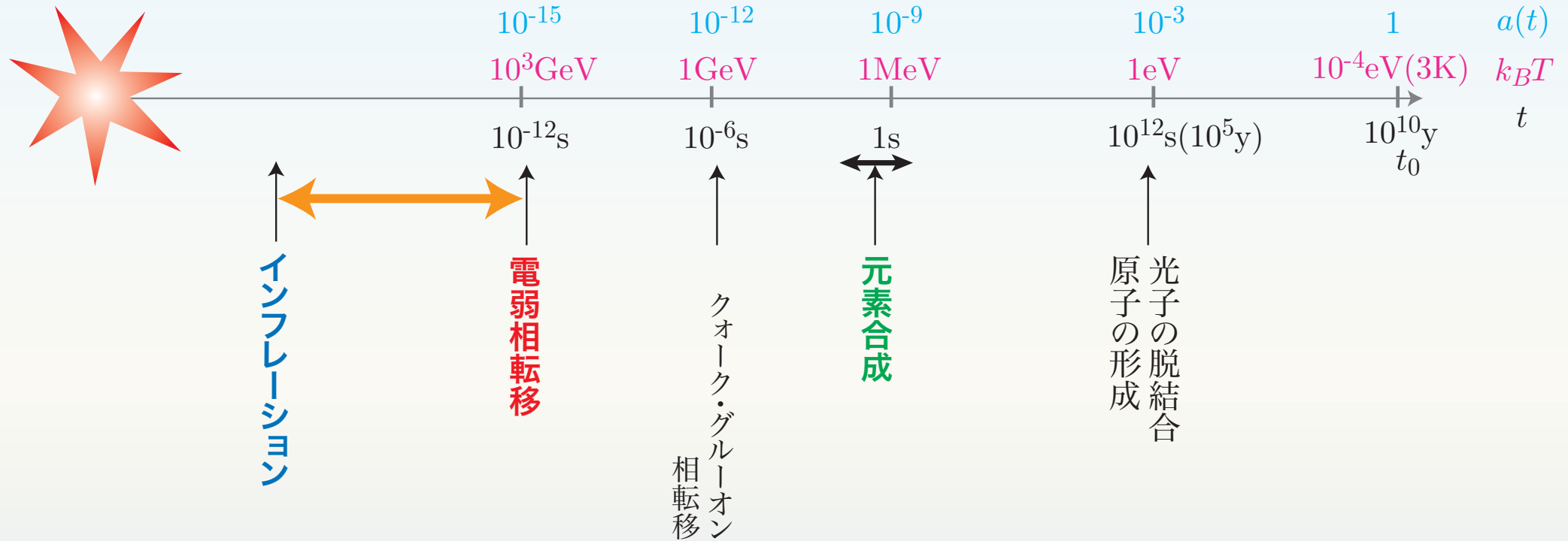
‘宇宙の初期条件’と考えるのは困難

gravitino問題

再加熱温度に上限

GUTs baryogenesis
Leptogenesis

何時バリオン数ができたか



☆インフレーションの再加熱以降

☆バリオン数非保存過程は、電弱相転移以降に無い

バリオン数生成のシナリオ

バリオン対称な宇宙を初期条件として生成するには

Sakharovの3条件

- (1) バリオン数非保存過程
- (2) C と CP 対称性の破れ
- (3) 平衡からのズレ

バリオン数非保存

— 実験では未発見 —

標準理論

\mathcal{L} はglobal $U(1)_B \times U(1)_L$ で不変

アノマリにより $U(1)_{B+L}$ が破れる (後述)

真空では変化率は殆ど0

大統一理論 GUTs

quarkとleptonが1つの多重項

Xボソン (leptoquark)

陽子寿命 ($\tau_p > 10^{32} \text{y}$)から制限

超対称模型

scalar quarkの期待値により自発的に破れる

初期宇宙のある時期にスカラーポテンシャルが...

CとCP対称性の破れ

場のユニタリ変換

P=空間反転(parity)

$$\phi(t, \mathbf{x}) \mapsto \pm\phi(t, -\mathbf{x})$$

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) \mapsto (A_0(t, -\mathbf{x}), -\mathbf{A}(t, -\mathbf{x}))$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \gamma_0\psi(t, -\mathbf{x})$$

$$\psi_L(x) \rightleftharpoons \psi_R(x)$$

C=荷電共役(charge conjugation)

$$\phi(x) \mapsto \phi^*(x)$$

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu^T(x)$$

$$\psi(x) \mapsto C\bar{\psi}^T(x) = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T(x)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i\sigma_2\psi_R^* \\ -i\sigma_2\psi_L^* \end{pmatrix}$$

$$\psi_L \xrightarrow{CP} \psi_L^*$$

$$\psi_R \xrightarrow{CP} \psi_R^*$$

C対称性の破れ

chiral gauge interaction

$$\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- \quad \left(\frac{1}{6} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R \right) B_\mu$$

CP対称性の破れ

質量次元4以下の演算子：

chiral gauge interactions and Yukawa interactions ($N_f \geq 3$),

scalar trilinear and quartic interactions

Majorana mass term, θ -term

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_{AL} \gamma^\mu V_{AB} d_{BL} W_\mu^+ + \bar{d}_{BL} \gamma^\mu V_{BA}^\dagger u_{AL} W_\mu^- \right]$$

エルミート共役

$$\bar{u}_{AL} \gamma^\mu d_{BL} W_\mu^+ \xleftrightarrow{\text{CP}} \bar{d}_{BL} \gamma^\mu u_{AL} W_\mu^-$$

物理的なCPの破れはパラメータのある組み合わせ

C対称性またはCP対称性があると、 バリオン対称な宇宙にバリオン数は生じない

宇宙の状態を表す密度演算子 $\rho(t) = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|$

物理量の期待値 $\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \text{Tr} [\rho(t) \mathcal{O}]$

時間発展 Liouville方程式: $i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + [\rho(t), H] = 0$

初期条件 ρ_0 : バリオン対称宇宙 $\langle n_B \rangle_0 = \text{Tr} [\rho_0 n_B] = 0$

解は形式的に ρ_0 と H で書かれる。

● H が C または CP 対称 $[H, C] = [H, CP] = 0$

● バリオン数は C 及び CP で奇

$$C n_B C^{-1} = -n_B \quad CP n_B (CP)^{-1} = -n_B$$

バリオン対称な宇宙 ρ_0 からスタートして、

H が C または CP 対称ならば、 $[\rho, C] = [\rho, CP] = 0$

$$\langle n_B \rangle = \text{Tr}[\rho n_B] = \text{Tr}[\rho C n_B C^{-1}] = -\text{Tr}[\rho n_B] = 0$$

$$\langle n_B \rangle = \text{Tr}[\rho n_B] = \text{Tr}[\rho CP n_B (CP)^{-1}] = -\text{Tr}[\rho n_B] = 0$$

$\langle n_B \rangle \neq 0$ となるには、 C と CP の両方が破れなければならない。

非平衡過程

$$\left. \begin{array}{l} \text{宇宙膨張 } H(t) \\ \text{背景場の変化} \end{array} \right\} \text{の(時間スケール)}^{-1} > \Gamma_{\Delta B \neq 0}$$

非平衡が成り立たないと、
逆過程も同確率で起こり **washout**

非平衡過程の取り扱い

非平衡の原因が宇宙膨張、且つ、空間的に一様な現象

→ Boltzmann equation

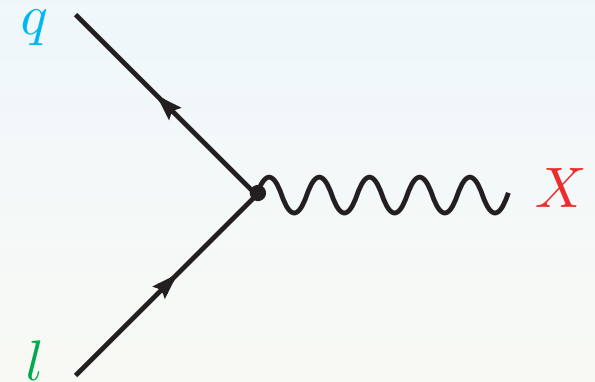
その他の場合は、case-by-case

GUT baryogenesis

例 SU(5)模型

$$\text{matter} \begin{cases} 5^* : \psi_L^i & \ni d_R^c, l_L \\ 10 : \chi_{[ij]L} & \ni q_L, u_R^c, e_R^c \end{cases}$$

$$i = 1 - 5 \rightarrow (\alpha = 1 - 3, a = 1, 2)$$



$$\text{gauge} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu, B_\mu & X_\mu^{\alpha a} \\ X_\mu^{\alpha a} & W_\mu, B_\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} \ni g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi + g \text{Tr} [\bar{\chi} \gamma^\mu \{A_\mu, \chi\}]$$

$$\ni g X_{\alpha\mu}^a \left[\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_{R\gamma}^c \gamma^\mu q_{L\beta a} + \epsilon_{ab} \left(\bar{q}_{Lb}^{-\alpha} \gamma^\mu e_R^c + \bar{l}_{Lb} \gamma^\mu d_R^{c\alpha} \right) \right]$$

簡単のため、X粒子の
decay channelは右の
4つだけだとする。

過程	分岐比	ΔB
$X \longrightarrow qq$	r	$2/3$
$X \longrightarrow \bar{q}\bar{l}$	$1 - r$	$-1/3$
$\bar{X} \longrightarrow \bar{q}\bar{q}$	\bar{r}	$-2/3$
$\bar{X} \longrightarrow ql$	$1 - \bar{r}$	$1/3$

熱浴から生成された X - \bar{X} 対が崩壊するとき

$$\langle \Delta B \rangle = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}(1-r) - \frac{2}{3}\bar{r} + \frac{1}{3}(1-\bar{r}) = r - \bar{r}$$

CまたはCP保存 $\rightarrow r = \bar{r} \rightarrow \langle \Delta B \rangle = 0$

逆過程がsuppressされるなら、 $B \propto r - \bar{r}$ が生成される。

at $T \simeq m_X$

$$\Gamma_D \simeq \alpha m_X \sim H(T) \simeq 1.66 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}}$$

$$\alpha \sim \frac{1}{40} \quad g_* = O(100)$$

X 粒子の対生成・対消滅が平衡からはずれず。

leptogenesisも同様

バリオン数生成のシナリオ

シナリオ	$\Delta B \neq 0 (\Delta L \neq 0)$	CPの破れ	非平衡状態
GUTs	leptoquarkの崩壊	decay vertex	$\Gamma_D < H(T)$
Electroweak	$(B + L)$ -anomaly	Yukawa, gauge, ...	電弱一次相転移
Leptogenesis	heavy- ν の崩壊	decay vertex	$\Gamma_D < H(T)$
Affleck-Dine⁽¹⁾	$\langle \tilde{q} \rangle, \langle \tilde{l} \rangle \neq 0$	scalar potential	scalar場の運動
string, DW⁽²⁾	anomaly	Yukawa, gauge	defectの運動
inflationary⁽³⁾	$\langle \tilde{q} \rangle, \langle \tilde{l} \rangle \neq 0$	scalar potential	(p)reheating

(1) Affleck and Dine, Nucl. Phys. B249 ('85)

Dine, Randall and Thomas, Nucl. Phys. B458 ('96)

(2) Brandenberger and Davis, Phys. Lett. B308 ('93)

Brandenberger, Davis and Trodden, Phys. Lett. B349 ('94)

(3) KF, Kakuto, Otsuki and Toyoda, Prog. Theor. Phys. 105 ('01)

Rangarajan and Nanopoulos, Phys. Rev. D64 ('01)

Sphaleron過程

- Sphaleronとは
- Sphaleron過程とフェルミオン数
- Sphaleron解

Sphaleronとは

$\sigma\varphi\alpha\lambda\epsilon\rho\sigma$ = ready-to-fall, deceitful (偽りの)

cf. a·sphalt

Klinkhammer & Manton, Phys. Rev. D30 ('84)

- 非線形場の理論の有限エネルギー解

エネルギー密度が局在

soliton: 't Hooft-Polyakov monopole, Nielsen-Olesen vortex, ...

Q-ball

- 不安定解 揺らぎのスペクトルに **1 個の負モード**

monopole, vortex, domain wall \longleftrightarrow topology

Q-ball \longleftrightarrow conserved global charge

代表的なsphaleron解

4-dim. SU(2) gauge + 1-doublet Higgs	Klinkhammer & Manton, Phys. Rev. D30 ('84)
2-dim. U(1) gauge-Higgs model	Bocharev & Shaposhnikov, Mod. Phys. Lett. A2 ('87)
2-dim. O(3) nonlinear sigma model	Mottola & Wipf, Phys. Rev. D39 ('89)
2-Higgs-Doublet Model	Kastening, Peccei and Zhang, Phys. Lett. B266 ('91)
Next-to-MSSM	KF, Kakuto, Tao and Toyoda, Prog. Theor. Phys. 114 ('05)

sphaleronの物理的な意味は？

不安定なsphaleron解をどうやって求めるか？

Sphaleron過程とフェルミオン数

Sphaleron過程

高温で起こるカイラル・アノマリによる(B+L)非保存過程

Standard Model

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{SM}} = & \bar{q}_{AL} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_2 A_\mu^a \frac{\tau^a}{2} - \frac{i}{6} g_1 B_\mu \right) q_{AL} + \bar{l}_{AL} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_2 A_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + \frac{i}{2} g_1 B_\mu \right) l_{AL} \\ & + \bar{u}_{AR} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{2}{3} ig_1 B_\mu \right) u_{AR} + \bar{d}_{AR} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{3} g_1 B_\mu \right) d_{AR} \\ & + \bar{e}_{AR} i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_1 B_\mu) e_{AR} + \dots\end{aligned}$$

classical $U(1)_B \times U(1)_L$ symmetry

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu \frac{1}{3} (\bar{u}_{AL} \gamma^\mu u_{AL} + \bar{u}_{AR} \gamma^\mu u_{AR} + \bar{d}_{AL} \gamma^\mu d_{AL} + \bar{d}_{AR} \gamma^\mu d_{AR}) = 0$$

currentはvectorlikeだが、chiral gauge interaction

divergence of the B and L currents

$$\partial_\mu j_{B+L}^\mu = \frac{N_f}{16\pi^2} \left[g_2^2 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) - g_1^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right]$$

$$\partial_\mu j_{B-L}^\mu = 0$$

2式を足して積分すると

$$\begin{aligned} B(t_f) - B(t_i) &= \frac{N_f}{32\pi^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} \left[g_2^2 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) - g_1^2 B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \right] \\ &= N_f [N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i)] \end{aligned}$$

Chern-Simons number ($A_0 = 0$ -gauge)

$$N_{CS}(t) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{ijk} \left[g_2^2 \text{Tr} \left(F_{ij} A_k - \frac{2}{3} g_2 A_i A_j A_k \right) - g_1^2 B_{ij} B_k \right]_t$$

$N_{CS} \in \mathbf{Z}$ for classical vacua

ゲージ場の真空

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = 0 \iff \begin{cases} F_{ij}^a = 0 \\ B_{ij} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_i^a \frac{\tau^a}{2} = iU(\mathbf{x})^\dagger \partial_i U(\mathbf{x}) \\ B_i = \partial_i \beta(\mathbf{x}) \end{cases}$$

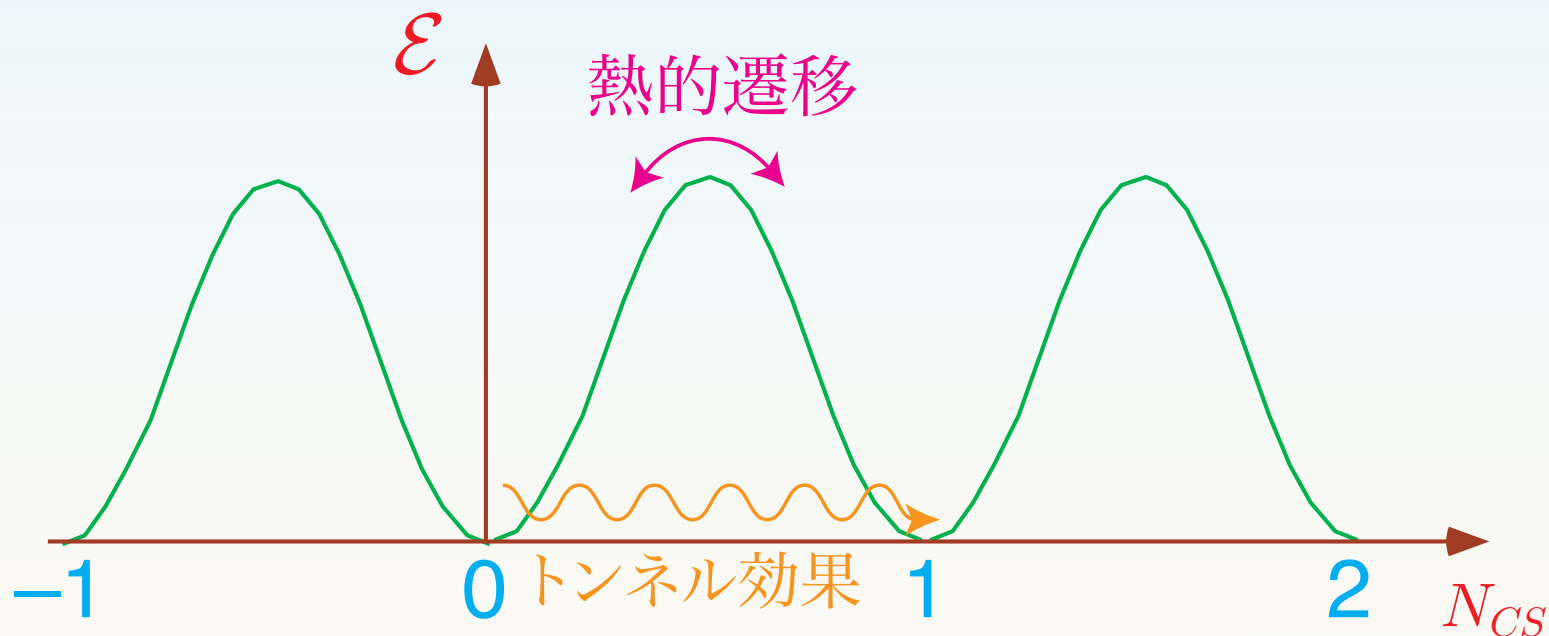
ここで $U(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S^3 \rightarrow SU(2) \simeq S^3$

$\pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z} \longrightarrow U(\mathbf{x})$ は整数 N_{CS} で分類される

‘winding number’



古典的真空の間の遷移



$T = 0$ トンネル確率 $\sim e^{-2S_{\text{instanton}}} = e^{-8\pi^2/g_2^2} \simeq e^{-164} \simeq 0$

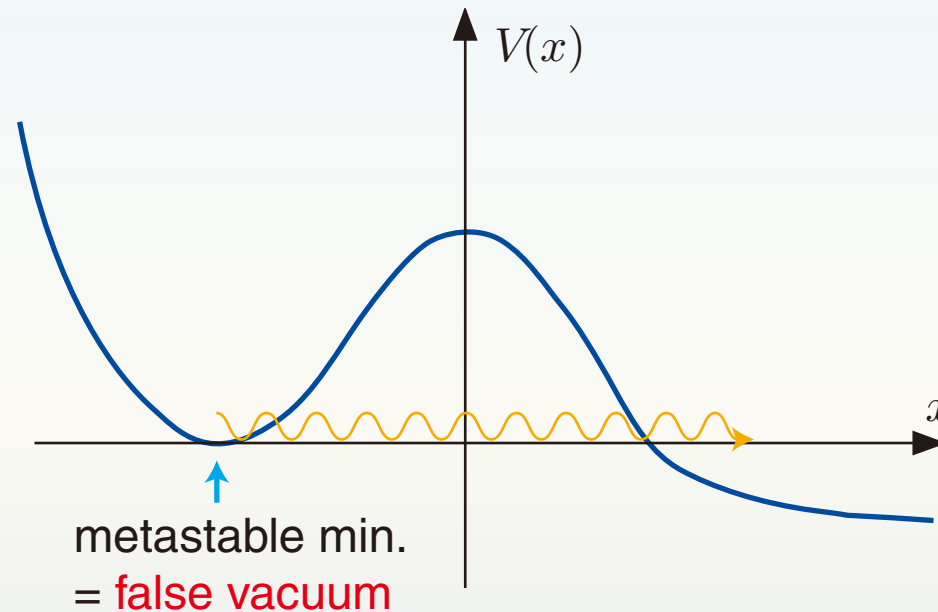
$T \neq 0$ 熱的遷移確率 $\sim e^{-E_{\text{sph}}/T}$ $E_{\text{sph}} \propto v(T)$
Higgs場の期待値

陽子崩壊の問題無し

遷移確率の評価

Fate of a false vacuum at finite temperatures

Coleman, 'The Uses of Instantons' in *Aspects of Symmetry*
Affleck, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 388



path integral

$T = 0$ での崩壊率 $\Gamma \simeq \frac{2}{\hbar} \text{Im} E_0 \simeq \left(\frac{S_{cl}}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-S_{cl}/\hbar} [1 + O(\hbar)]$

false vacuumに局在化した状態

S_{cl} : bounce action (euclidean)

instanton-anti-instanton pair

有限温度では

$$\Gamma \propto \text{Im } F$$

$$F = -T \log \text{Tr} e^{-H/T}$$

H はエルミートなのに？

$\text{Im } F$ はその計算法によって定義される

Γ 量子力学的確率流の熱的平均

$\text{Im } F$ $\text{Tr} e^{-H/T}$ の経路積分表示

WKB近似 不安定古典解の周り

→ negative mode $\text{Im } F$

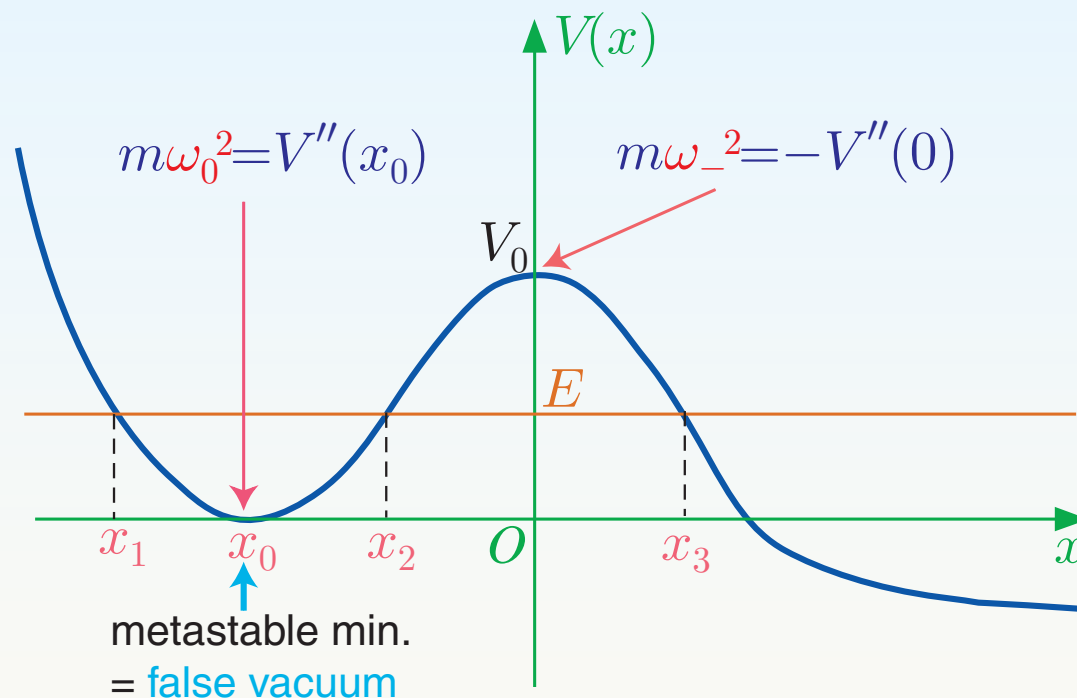
1次元量子力学系

初期状態

x_0 に局在した熱平衡状態

調和振動子 ω_0

準安定 $\longleftrightarrow \frac{1}{2} \hbar \omega_0, T \ll V_0$



初期状態の崩壊率

$$\Gamma(T) \equiv \int_0^\infty dE \frac{e^{-E/T}}{Z_0} \Gamma(E)$$

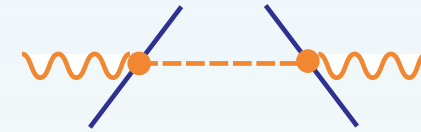
$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})/T} = \left(2 \sinh \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right)^{-1}$$

$$\Gamma(E) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi_E^* \psi_E' - \psi_E'^* \psi_E)$$

$\Gamma(E)$ の評価 ← $\psi_E(x)$ by WKB approx.

Landau & Lifshitz, Quantum Mechanics

(1) $E < V_0$ 直線近似



$$\Gamma(E) \simeq \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_2(E)}^{x_3(E)} dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \right]$$

(2) $E \gtrsim V_0$ 放物線近似



$$\Gamma(E) \simeq \frac{1}{2\pi\hbar} \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2\pi}{\hbar\omega_-} (E - V_0) \right] \right\}^{-1}$$

$\Gamma(T)$ のE-積分の評価で、

低温では(1)を用い、高温では(2)を用いる。

(i) 低温: $T = \beta^{-1} < \frac{\hbar\omega_-}{2\pi}$ E -積分は $E < V_0$ の区間の寄与大 線形近似

$$\Gamma \simeq \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} \int_0^\infty dE e^{-[\beta\hbar \cdot E + W(E)]/\hbar} = \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} \int_0^\infty dE e^{-f(E)/\hbar}$$

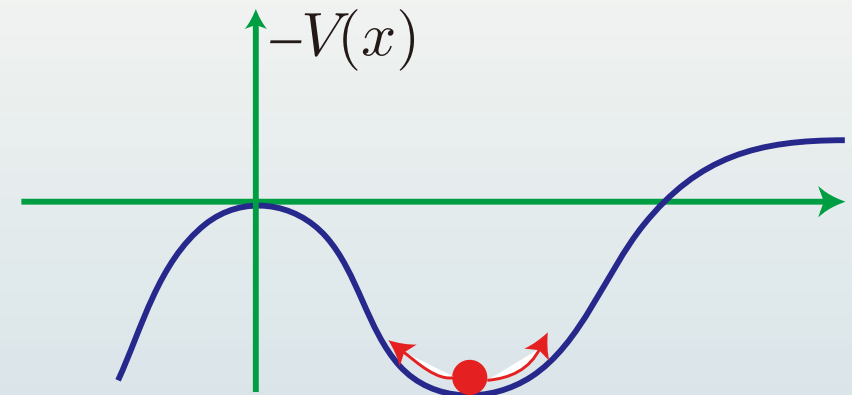
ここで $W(E) \equiv 2 \int_{x_2(E)}^{x_3(E)} dx \sqrt{2m(V(x) - E)}$

WKB approx. $f'(E_0) = \beta\hbar - T(E_0) = 0$ $f(E)$ を E_0 の周りで展開

$$T(E) \equiv \int_{x_2(E)}^{x_3(E)} dx \sqrt{\frac{2m}{V(x) - E}} = -V(x) \text{ の中で運動するエネルギー } -E \text{ の軌道の周期}$$

$$\min_{0 \leq E < \infty} \{T(E)\} = T(0) \simeq \frac{2\pi}{\omega_-}$$

$$\implies \exists E_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \beta\hbar = T(E_0)$$



WKB approx. の leading & Gaussian integral

$$\Gamma \simeq \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} e^{-[T(E_0)E_0 + W(E_0)]/\hbar} \left| \frac{2\pi\hbar}{T'(E_0)} \right|^{1/2}$$

ここで指数は $W(E)$ の Legendre 変換

$$\begin{aligned} T(E) \cdot E + W(E) &= S(T(E)) = \text{エネルギー} - E \text{ の作用} \\ &= \text{bounce 解の作用} \end{aligned}$$

(ii) 高温: $T = \beta^{-1} > \frac{\hbar\omega_-}{2\pi}$

$f'(E) = 0$ の解無し

積分は $E \gtrsim V_0$ の寄与大

$$\begin{aligned}\Gamma &\simeq \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} \int_0^\infty dE \frac{e^{-\beta E}}{1 + e^{-2\pi(E-V_0)/(\hbar\omega_-)}} \\ &= \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} e^{-\beta V_0} \int_{-V_0}^\infty dE \frac{e^{-\beta E}}{1 + e^{-2\pi E/(\hbar\omega_-)}}\end{aligned}$$

integrand $\rightarrow 0$ as $E \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}&\simeq \frac{Z_0^{-1}}{2\pi\hbar} e^{-\beta V_0} \int_{-\infty}^\infty dE e^{-\beta E} / \left[1 + e^{-2\pi E/(\hbar\omega_-)} \right] \\ &= Z_0^{-1} \omega_- \cdot \frac{e^{-\beta V_0}}{4\pi \sin(\beta\hbar\omega_-/2)}\end{aligned}$$

波動関数にWKB近似を適用した結果、

$$T = \beta^{-1} \lesssim \frac{\hbar\omega_-}{2\pi} :$$

$$\Gamma \simeq Z_0^{-1} |2\pi T'(E_0)|^{-1/2} e^{-S(E_0)/\hbar}$$

$S(E_0)$ はエネルギー $-E_0$ の古典解(bounce)のEuclid作用

$$T = \beta^{-1} \gtrsim \frac{\hbar\omega_-}{2\pi} :$$

$$\Gamma \simeq Z_0^{-1} \omega_- \cdot \frac{e^{-\beta V_0}}{4\pi \sin(\beta\hbar\omega_-/2)}$$

これらを経路積分による $\text{Im } F$ の評価と比較する

$$F = -\frac{1}{\beta} \log \text{Tr} e^{-\beta H} = \frac{1}{\beta} \log \int_{\text{periodic bc}} [dx] e^{-S[x]/\hbar}$$

ここで

$$S[x] = \int_0^{\beta\hbar} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + V(x) \right]$$

euclidean action

経路積分のWKB近似 ($\hbar \sim 0$ の鞍点法)

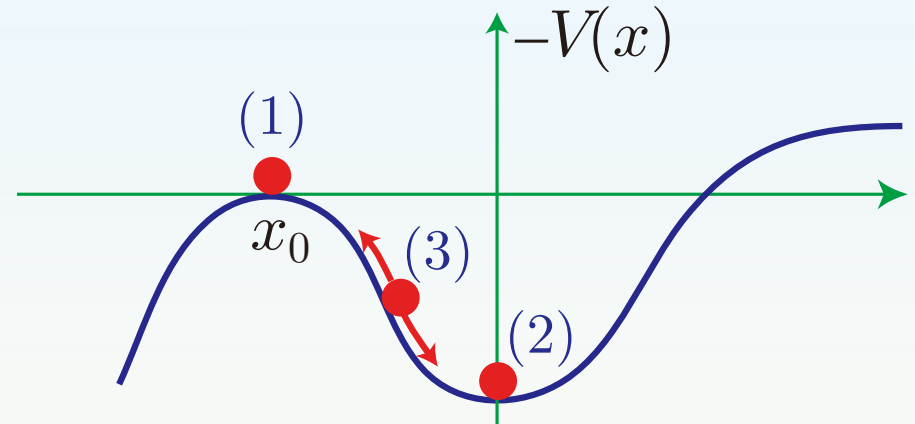
境界条件 $x(0) = x(\beta\hbar)$ を満たす解

- (1) $x_{cl}(t) = x_0 \ (\forall t)$
- (2) $x_{cl}(t) = 0 \ (\forall t)$
- (3) $x_{cl}(t) = x_b(t)$ with $x_b(0) = x_b(\beta\hbar)$

} 常に存在

bounce

$\beta\hbar \gtrsim 2\pi/\omega_-$ の時に存在 (低温)



それぞれの解の寄与

$$Z^{(1)} \simeq e^{-S[x_{cl}]/\hbar} \int [dy] e^{-\frac{1}{2\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt (\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2)} = \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega_0/2)} = Z_0$$

$$Z^{(2)} \simeq e^{-S[x_{cl}]/\hbar} \int [dy] e^{-\frac{1}{2\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt (\dot{y}^2 - \omega_-^2 y^2)} = e^{-\beta V_0} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2 \sin(\beta\hbar\omega_-/2)}$$

↑
解析接続

bounceの寄与 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gaussian integral: } -\partial_t^2 + V''(x_b) \\ \text{multi-bounce by dilute-gas approx.} \end{array} \right.$

$-\partial_t^2 + V''(x_b(t))$ の性質

★ zero mode: $\psi_0(t) = C \dot{x}_b(t) \quad \because (-\partial_t^2 + V''(x_b)) \dot{x}_b(t) = \frac{d}{dt}[-\ddot{x}_b + V'(x_b)] \equiv 0$

★ $\dot{x}_b(t)$ には節(zero点)がある $\longrightarrow \exists$ one negative mode

$$\left[\det'(-\partial_t^2 + V''(x_b)) \right]^{-1/2} = \frac{1}{2i} \left| \det'(-\partial_t^2 + V''(x_b)) \right|^{-1/2} = \frac{1}{2i} |S[x_b] \cdot T'(E)|^{-1/2}$$

↑
Rajaraman, Phys.Rep. C21 ('75)

$$\therefore Z^{(3)} \simeq \sum_{n=1}^{N(\beta)} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i\beta\hbar}{2} \left(\frac{S[x_b]}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-S[x_b]/\hbar} |S[x_b] \cdot T'(E)|^{-1/2} \right]^n$$

Im part は $n=\text{odd}$ から $\longrightarrow n=1$ が dominate

$$\text{Im } F = -\frac{1}{\beta} \text{Im} \left[\log Z_0 + \log \left(1 + \frac{Z^{(2)}}{Z_0} + \frac{Z^{(3)}}{Z_0} \right) \right]$$

低温では(3) bounceが効く:

$$\text{Im } F \simeq -\frac{1}{\beta Z_0} \text{Im } Z^{(3)} \simeq Z_0^{-1} \frac{\hbar}{2} |2\pi\hbar T'|^{-1/2} e^{-S[x_b]/\hbar}$$

高温では(2) top-of-the barrierが効く:

$$\text{Im } F \simeq -\frac{1}{\beta Z_0} \text{Im } Z^{(2)} \simeq Z_0^{-1} \frac{1}{4\beta \sin(\beta\hbar\omega_-/2)} e^{-\beta V_0}$$

前に得られた Γ の結果と比較すると、

$$\star T < \frac{\hbar\omega_-}{2\pi}: \quad \Gamma \simeq \frac{2}{\hbar} \text{Im } F \simeq Z_0^{-1} |2\pi\hbar T'(E_0)|^{-1/2} e^{-S[x_b]/\hbar}$$

トンネル効果

$$\star T > \frac{\hbar\omega_-}{2\pi}: \quad \Gamma \simeq \frac{\omega_- \beta}{\pi} \text{Im } F \simeq Z_0^{-1} \frac{\omega_-}{4\pi \sin(\beta\hbar\omega_-/2)} e^{-\beta V_0}$$

熱的遷移

$\text{Im } F$ の計算は多自由度系（場の理論）にも適用可

高温ではバリアの頂点に相当する配位が決める

1 negative mode

Sphaleron

遷移率評価の例

4次元SU(2)gauge-Higgs系(1-doublet)

Arnold and McLerran, Phys. Rev. D36 ('87)

broken phase

$$\Gamma_{\text{sph}}^{(b)} \simeq k \mathcal{N}_{\text{tr}} \mathcal{N}_{\text{rot}} \frac{\omega_-}{2\pi} \left(\frac{\alpha_W(T)T}{4\pi} \right)^3 e^{-E_{\text{sph}}/T}$$

$$\mathcal{N}_{\text{tr}} = 26, \quad \mathcal{N}_{\text{rot}} = 5.3 \times 10^3 \text{ for } \lambda = g^2$$

$$\omega_-^2 \simeq (1.8 \sim 6.6)m_W^2 \text{ for } 10^{-2} \leq \lambda/g^2 \leq 10, \quad k \simeq O(1)$$

symmetric phase

$$\Gamma_{\text{sph}}^{(s)} \simeq \kappa (\alpha_W T)^4$$

← 次元解析

MC simulation: $\langle N_{CS}(t)N_{CS}(0) \rangle \sim \langle N_{CS} \rangle^2 + Ae^{-\Gamma V t}$

$$\kappa = 1.09 \pm 0.04 \quad SU(2) \text{ pure gauge系}$$

Ambjørn and Krasnitz, P.L.B362('95)

高温相ではSphaleron解は無いが、**スファレロン過程**と言う。

MC simulationの例 2次元 $U(1)$ gauge-Higgs系 (broken phase)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 - \lambda\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2$$

● instanton = vortex $\pi_1(U(1)) = \mathbf{Z}$ Raby and Ukawa, Phys. Rev. D18 ('78)

● classical vacua ($A_0 = 0$ gauge)

$$\phi(x) = v e^{i\alpha(x)}, \quad A_1(x) = \frac{1}{g}\partial_x\alpha(x)$$

$$\text{with } \alpha(\infty) - \alpha(-\infty) = 2\pi N$$

axial fermion numberの変化 axial $U(1)$ anomaly

$$\Delta Q_5 = \frac{g}{4\pi} \int_{t_i}^{t_f} dt dx \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i)$$

$$N_{CS}(t) = \frac{g}{2\pi} \int dx A_1(x) = N \quad \text{for the vacua}$$

● sphaleron solution ($A_0 = 0$ gauge)

$$\phi_{\text{sph}}(x) = e^{i\pi(1-y(x))/2} v y(x) = e^{i\theta(x)} v y(x)$$

$$A_1^{\text{sph}}(x) = \frac{1}{g} \partial_x \theta(x)$$

$$y(x) \equiv \tanh(\sqrt{\lambda} v x) = \tanh\left(\frac{m_H x}{2}\right)$$

この配位の N_{CS}

$$N_{CS} = \frac{g}{2\pi} \int dx A_1^{\text{sph}}(x) = \frac{1}{2\pi} [\theta(\infty) - \theta(-\infty)] = \frac{1}{2}$$

【注】 $\theta(x)$ は $\phi_{\text{sph}}(x)$ の位相ではない

$|\phi_{\text{sph}}(x)|$ と $\text{Arg}(\phi_{\text{sph}}(x))$ は $x = 0$ で滑らかではない

vacuumでの配位($N_{CS} = 0, -2, 4$)と N_{CS} の変化

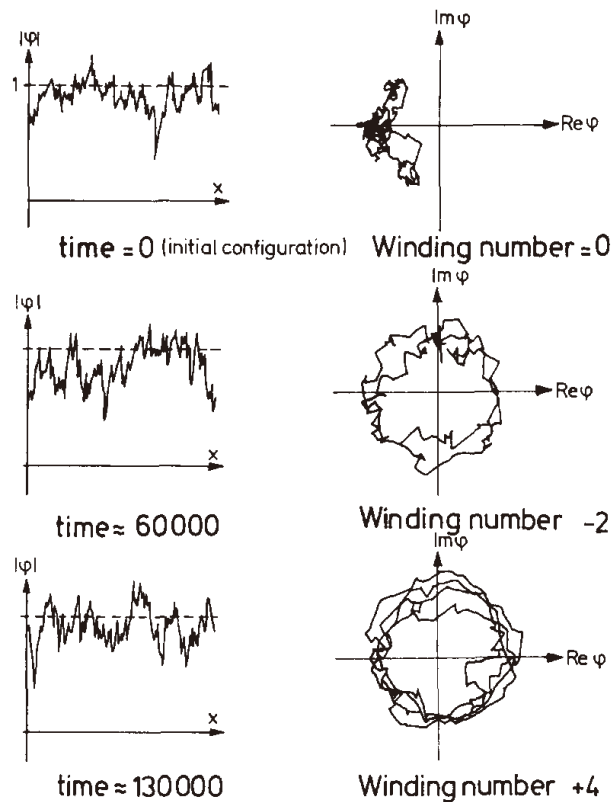


Fig. 1. States of the system ($T=0.07M_{sph}$).

N_{CS} 変化中の $|\phi(x)|$

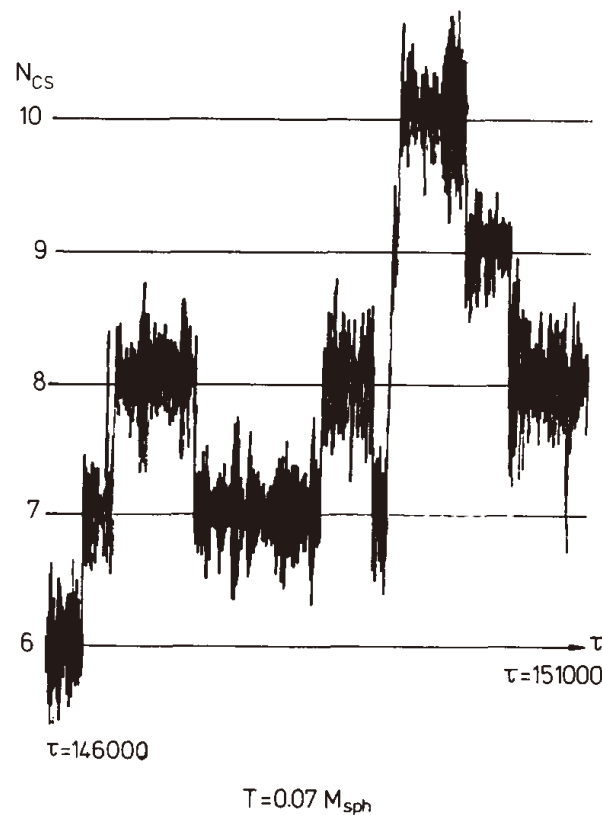
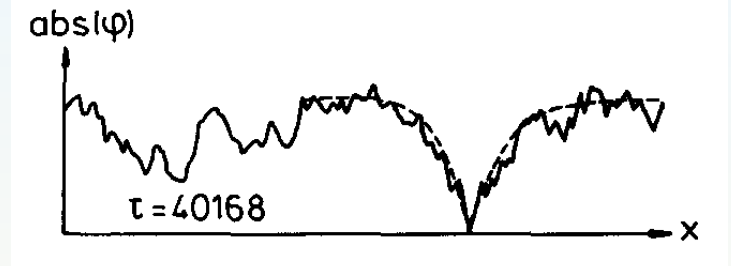


Fig. 2. Chern-Simons number as a function of time ($T=0.07M_{sph}$).



N_{CS} 変化中の $\text{Arg}\phi$ の動き

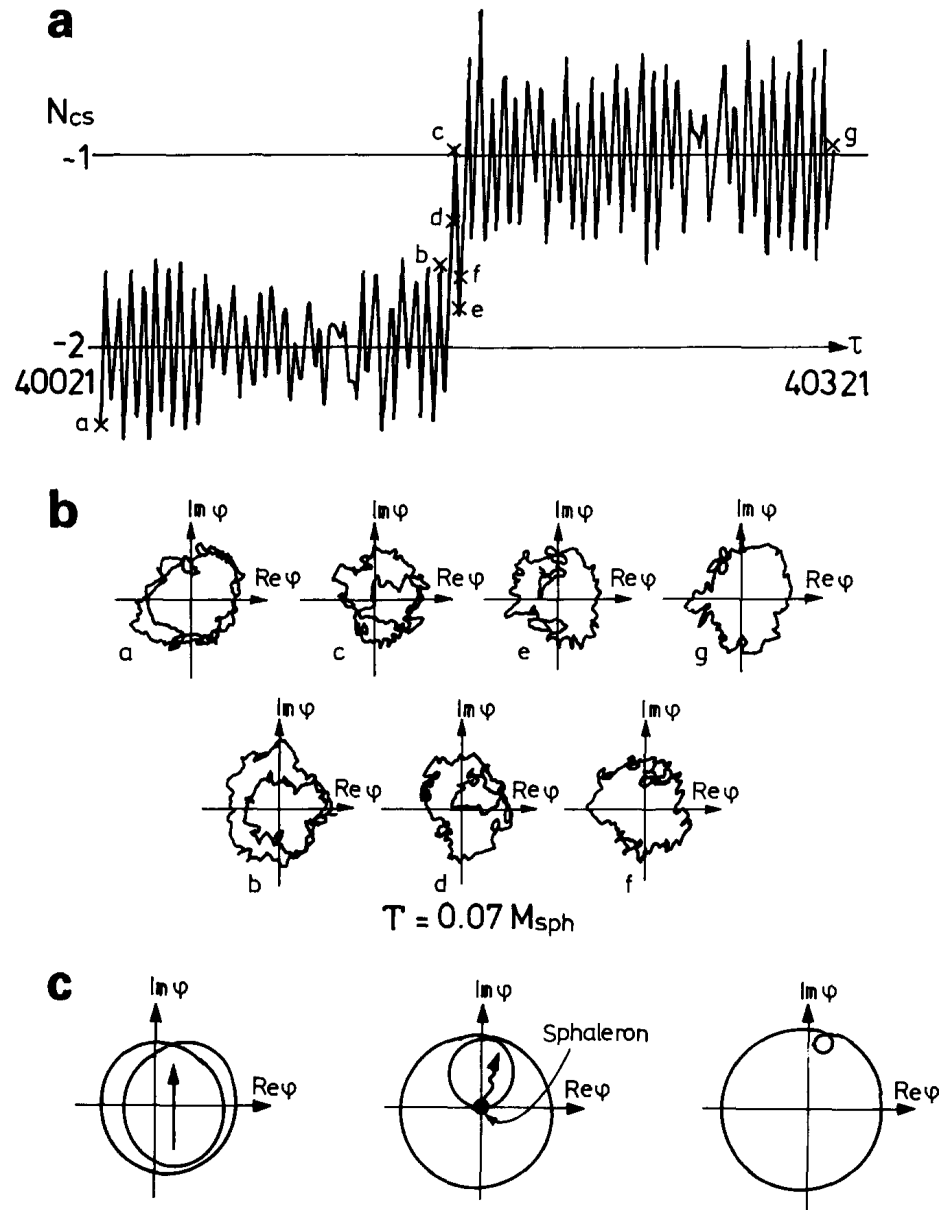


Fig. 3. Anatomy of the sphaleron transition: (a) Behaviour of the Chern-Simons number. (b) "Trajectories" of the scalar field at different moments a-g; the parameter along the curve is the spatial coordinate x^1 . (c) Schematic plot of the sequence of (b).

Γ^{-1} vs T

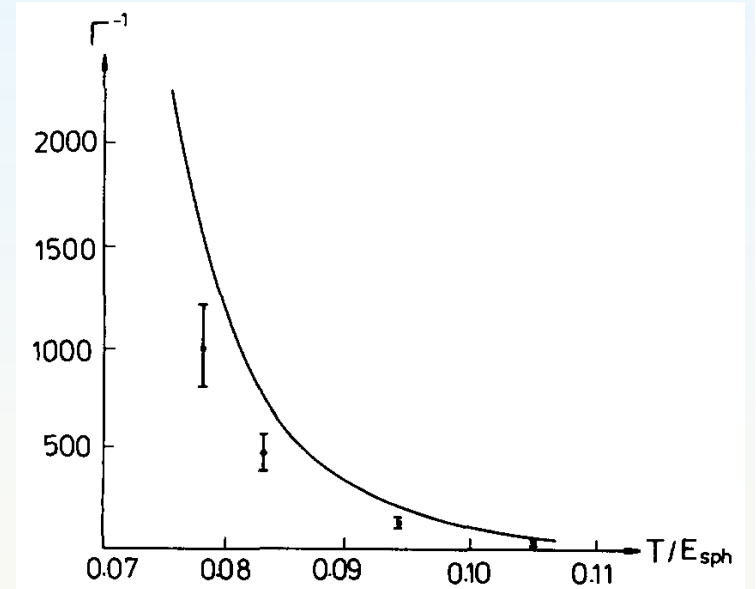


Fig. 5. Transition rate as a function of the temperature.

Fermion数の変化

bosonicな背景場の変化 \longrightarrow Fermion数(B+L)の変化

 index theorem

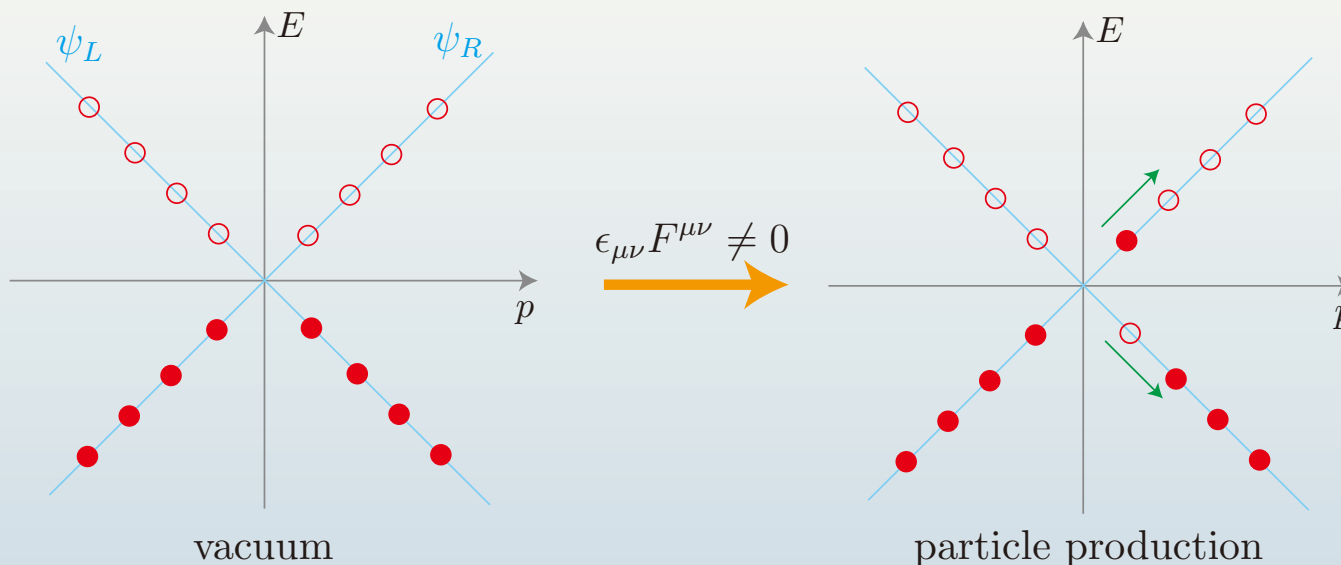
Atiyah and Singer, Ann. Math. 87 (1968)

$$n_R - n_L = \nu = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr} \left(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

$\Delta(\text{chiral fermions}) = \text{Pontrjagin index} = \text{instanton number}$

 level crossing

断熱的にgauge場をon-off



Christ, Phys. Rev. D21 (1980)

Ambjørn, et al., Nucl. Phys. B221 (1983)

review:
Klinkhamer and Rupp,
J. Math. Phys. 44 ('03)
(hep-th/0304167)

解ける系 1+1 dim. U(1) gauge theory

4-dim. EW theory

$$\partial_\mu j_{B+L}^\mu = \frac{N_f}{16\pi^2} \left[g_2^2 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) - g_1^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right]$$

B+Lの変化

$$N_{CS}(t) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^3 \mathbf{x} \epsilon_{ijk} \left[g_2^2 \text{Tr} \left(F_{ij} A_k - \frac{2}{3} g_2 A_i A_j A_k - \dots \right) \right]$$

vacuum: $A_i = iU^\dagger(\mathbf{x}) \partial_i U(\mathbf{x})$

$$\pi_3(SU(2)) \simeq \mathbf{Z}$$

2-dim. U(1) theory

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{g}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

axial fermion numberの変化

$$N_{CS}(t) = \frac{g}{2\pi} \int dx A_1(t, x)$$

$$A_1 = \frac{1}{g} \partial_x \alpha(x)$$

$$\pi_1(U(1)) \simeq \mathbf{Z}$$

Dirac方程式 $i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu(x)) \psi(x) = 0$ **b.c.** $\psi(x+L) = \psi(x)$

↓ $A_0 = 0$

$$i\partial_t \psi(x) = H\psi(x) = \boxed{i\sigma_3 (\partial_x - igA_1(x))} \psi(x) = \begin{cases} i(\partial_x - igA_1(x)) \psi_L(x) \\ -i(\partial_x - igA_1(x)) \psi_R(x) \end{cases}$$

t -indep. gauge trf. $\tilde{\psi}(x) = \exp\left(ig \int_0^x dx' A_1(x')\right) \psi(x)$

$H\tilde{\psi}(x) = i\sigma_3 \partial_x \tilde{\psi}(x)$ **自由粒子** $\alpha L = g \int_0^L dx A_1(x)$

但し、b.c.は $\tilde{\psi}(x+L) = e^{ig \int_0^{x+L} dx A_1(x)} \psi(x+L) = e^{i\alpha L} \tilde{\psi}(x)$

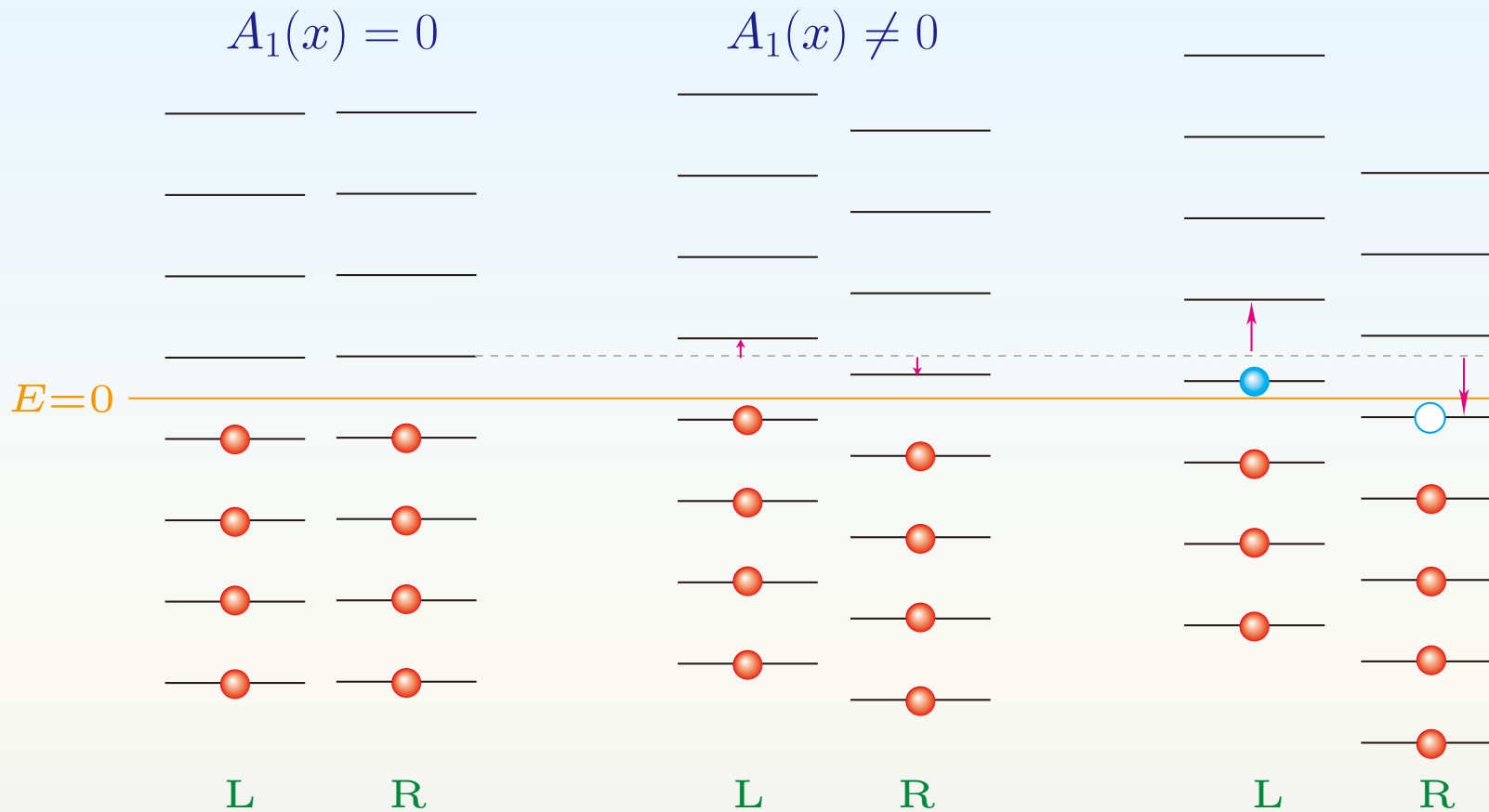
解 $\tilde{\psi}(x) = e^{ipx}$ **with** $p = \frac{2\pi n}{L} + \alpha$

$H\tilde{\psi}_L(x) = +p\tilde{\psi}_L(x)$

$N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i) = 1$

$H\tilde{\psi}_R(x) = -p\tilde{\psi}_R(x)$

→ $n \rightarrow n+1$ と同じ効果



$$H\tilde{\psi}_L(x) = +p\tilde{\psi}_L(x)$$

$$H\tilde{\psi}_R(x) = -p\tilde{\psi}_R(x)$$

$$p = \frac{2\pi n}{L} + \alpha$$

$$\alpha = \frac{g}{L} \int_0^L dx A_1(x)$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \frac{2\pi}{L} \text{ で真空に戻る}$$

平衡Sphaleron過程と量子数

sphaleron過程が
化学平衡

$$\Gamma_{\text{sph}}(T) > H(T) \longrightarrow \text{B+L washout} \quad B \propto (B - L)$$

比例係数は後述

バリオン数を残すには、スファレロン過程が
化学平衡になる前に $B-L$ があればよい。

バリオン数生成シナリオの可能性が拡大

レプトン数生成

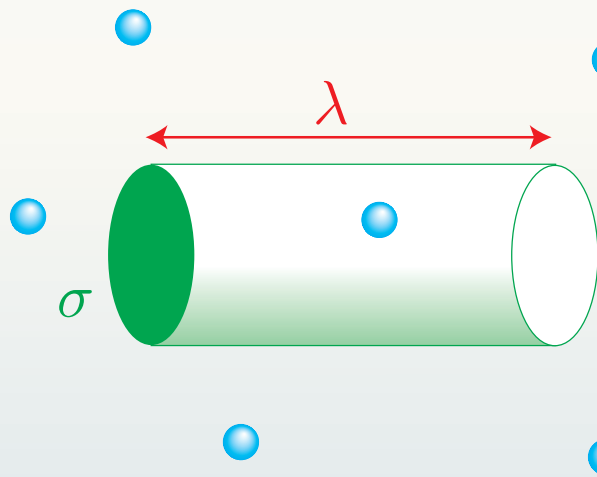
諸過程が平衡であるときの種々の量子数

相互作用の時間スケール \bar{t}

相対論的粒子：(反応率)⁻¹ = $\bar{t} \simeq \lambda$ mean free path

その粒子の相互作用全断面積 = $\sigma \simeq \frac{\alpha^2}{s} \simeq \frac{\alpha^2}{T^2}$

粒子数密度 = $n(T) \simeq g_{*n} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$ $g_{*n} = \sum_B g_B + \frac{3}{4} \sum_F g_F$



$$\sigma \cdot \lambda = \frac{1}{n(T)}$$

$$\bar{t} = \lambda \simeq \frac{10}{g_{*n} T^3} \left(\frac{\alpha^2}{T^2} \right)^{-1} = \frac{10}{g_{*n} \alpha^2 T}$$

放射優勢期 $H(T) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_r(T)} \simeq 1.66 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_P}$ $m_P = 1.2 \times 10^{19} \text{GeV}$

宇宙膨張の時間スケール $H(T)^{-1} \simeq \frac{m_P}{1.66 \sqrt{g_*} T^2}$ 10^{14}GeV^{-1} @100GeV

素過程の時間スケール $\bar{t} \simeq \lambda = \frac{1}{\sigma n(T)} \simeq \frac{1}{\alpha^2 T}$ $1 - 10 \text{GeV}^{-1}$
QCD - EW

スファレロン過程 (対称相) $\bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{sym})} \simeq \frac{1}{\alpha_W^4 T}$ 10^3GeV^{-1}

スファレロン過程 (非対称相) $\bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{br})} \simeq \frac{1}{\alpha_W^4 T} e^{E_{\text{sph}}/T}$

$T = T_C \simeq 100\text{GeV}$ で電弱相転移 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の自発的破れ

$$T > T_C \text{ (対称相)} \quad \bar{t}_{\text{QCD}} < \bar{t}_{EW} < \bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{sym})} \ll H(T)^{-1}$$

すべてのゲージ相互作用とスファレロン過程は化学平衡

$$T < T_C \text{ (非対称相)} \quad \bar{t}_{\text{QCD}} < \bar{t}_{EW} \ll H(T)^{-1}$$

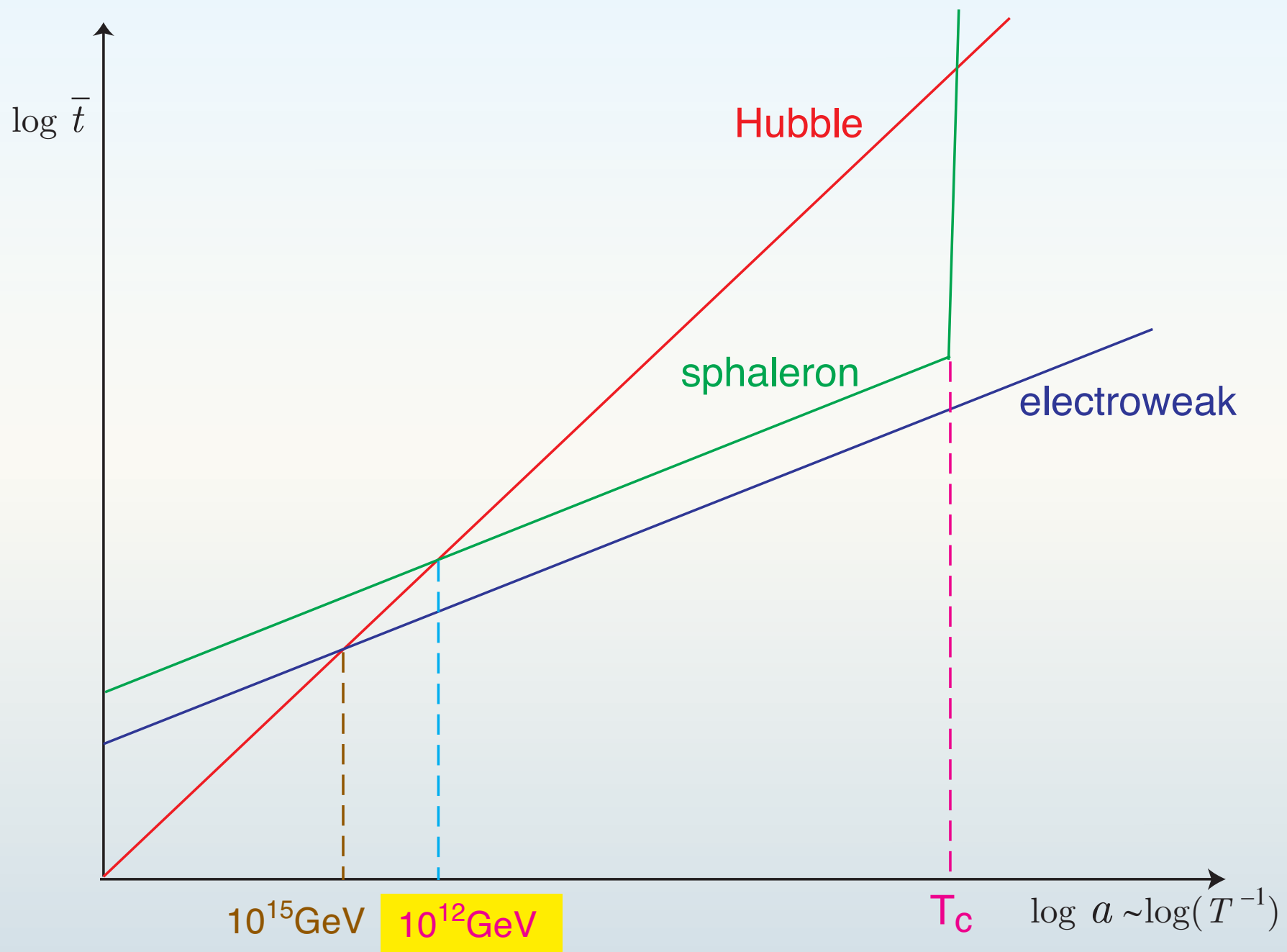
すべてのゲージ相互作用は化学平衡

相転移直後に $v(T_C) < T_C$ となる場合 弱い一次・二次相転移

$$\exists T_{\text{dec}} < T < T_C \longrightarrow \bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{br})} > H(T)^{-1}$$

非対称相でもスファレロン過程が平衡

時間スケールの比較



保存量 Q_i ($[H, Q_i] = 0$) の期待値

$$\{Q_i\} = \{B/N_f - L_A, Q_{\text{em}}, \dots\}$$

$$Z(T, \mu) \equiv \text{Tr} \left[e^{-(H - \sum_i \mu_i Q_i)/T} \right]$$

$$\longrightarrow \langle Q_i \rangle(T, \mu) = T \frac{\partial}{\partial \mu_i} \log Z(T, \mu) \quad \{Q_i\} \text{ と } \{\mu_i\} \text{ の関係}$$

$Z(T, \mu)$ の計算は困難 (経路積分、非摂動効果)

● 摂動論

Khlebnikov & Shaposhnikov, Phys. Lett. B387 ('96)

Laine & Shaposhnikov, Phys. Rev. D61 ('00)

● 自由場近似

Harvey & Turner, Phys. Rev. D42 ('90)

各粒子の化学ポテンシャル μ を導入し、量子数を μ で表す。

粒子の μ には化学平衡の関係式を課す。



「粒子数」の期待値

$$\langle N \rangle = \langle n \rangle - \langle \bar{n} \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{(\omega_{\mathbf{k}} - \mu)/T} \mp 1} - \frac{1}{e^{(\omega_{\mathbf{k}} + \mu)/T} \mp 1} \right]$$

$$\stackrel{m \ll T}{\sim} \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{x^2}{e^{x - \mu/T} \mp 1} - \frac{x^2}{e^{x + \mu/T} \mp 1} \right]$$

$$\stackrel{|\mu| \ll T}{\sim} \begin{cases} \frac{T^3}{3} \cdot \frac{\mu}{T}, & (\text{bosons}) \\ \frac{T^3}{6} \cdot \frac{\mu}{T}, & (\text{fermions}) \end{cases}$$

$$\text{cf. } s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 \rightarrow \frac{\langle N \rangle}{s} \sim \frac{|\mu|}{T} \simeq 10^{-10} \ll 1$$

質量の効果

Dreiner and Ross, Nucl. Phys. B410 ('93)

Inui, Ichihara, Mimura, Sakai, Phys. Lett B325 ('94)

粒子の化学ポテンシャル

N_f 世代のフェルミオン, N_H 個のHiggs doublet $\begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$

W^-	$u_{L(R)}$	$d_{L(R)}$	$e_{iL(R)}$	ν_{iL}	ϕ^0	ϕ^-
μ_W	$\mu_{u_{L(R)}}$	$\mu_{d_{L(R)}}$	$\mu_{iL(R)}$	μ_i	μ_0	μ_-

$(3N_f + 7) \mu$'s

Wは横波だけ, HiggsはNG modeもカウント

quark mixingは化学平衡, Lepton flavor conservation

color & charge neutrality : $\mu_{\text{gluon}} = \mu_{Z,\gamma} = 0$

化学平衡の結果

gauge $\mu_W = \mu_{d_L} - \mu_{u_L} = \mu_{iL} - \mu_i = \mu_- + \mu_0$ #(equations)
 $N_f + 2$

Yukawa $\mu_0 = \mu_{u_L} - \mu_{u_R} = \mu_{d_R} - \mu_{d_L} = \mu_{iR} - \mu_{iL}$ $N_f + 2$

$(3N_f + 7) - 2(N_f + 2) = N_f + 3$ の独立な μ $(\mu_W, \mu_0, \mu_{u_L}, \mu_i)$

sphaleron $|0\rangle \Rightarrow \prod_i (u_L d_L d_L \nu_L)_i \longrightarrow N_f(\mu_{u_L} + 2\mu_{d_L}) + \sum_i \mu_i = 0$

量子数密度

$\frac{T^2}{6}$ を単位とする

gauge, Yukawaの化学平衡から

$$B = N_f(\mu_{u_L} + \mu_{u_R} + \mu_{d_L} + \mu_{d_R}) = 4N_f\mu_{u_L} + 2N_f\mu_W,$$

$$L = \sum_i (\mu_i + \mu_{iL} + \mu_{iR}) = 3\mu + 2N\mu_W - N_f\mu_0$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3}N_f(\mu_{u_L} + \mu_{u_R}) \cdot 3 - \frac{1}{3}N_f(\mu_{d_L} + \mu_{d_R}) \cdot 3 - \sum_i (\mu_{iL} + \mu_{iR}) - 2 \cdot 2\mu_W - 2N_H\mu_- \\ &= 2N_f\mu_{u_L} - 2\mu - (4N_f + 4 + 2N_H)\mu_W + (4N_f + 2N_H)\mu_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2}N_f(\mu_{u_L} - \mu_{d_L}) \cdot 3 + \frac{1}{2} \sum_i (\mu_i - \mu_{iL}) - 2 \cdot 2\mu_W - 2 \cdot \frac{1}{2}N_H(\mu_0 + \mu_-) \\ &= -(2N_f + N_H + 4)\mu_W \end{aligned}$$

ここで $\mu \equiv \sum_i \mu_i$

sphaleron化学平衡を課すと $N_f(2\mu_L + \mu_W) + \mu = 0$

→ 量子数密度は (μ_W, μ, μ_0) で表される

★ $T > T_C$ (symmetric phase)

$Q = I_3 = 0$ を要請 ($\mu_W = 0$)

$$B = \frac{8N_f + 4N_H}{22N_f + 13N_H} (B - L), \quad L = -\frac{14N_f + 9N_H}{22N_f + 13N_H} (B - L)$$

★ $T < T_C$ (broken phase)

$Q = 0$ and $\mu_0 = 0$ ($\because \phi^0$ condensates)

$$B = \frac{8N_f + 4(N_H + 2)}{24N_f + 13(N_H + 2)} (B - L), \quad L = -\frac{16N + f + 9(N_H + 2)}{24N_f + 13(N_H + 2)} (B - L)$$

何れにせよ、

$$(B - L)_{\text{primordial}} = 0 \longrightarrow B = L = 0$$

現在の宇宙に物質が存在するためには、

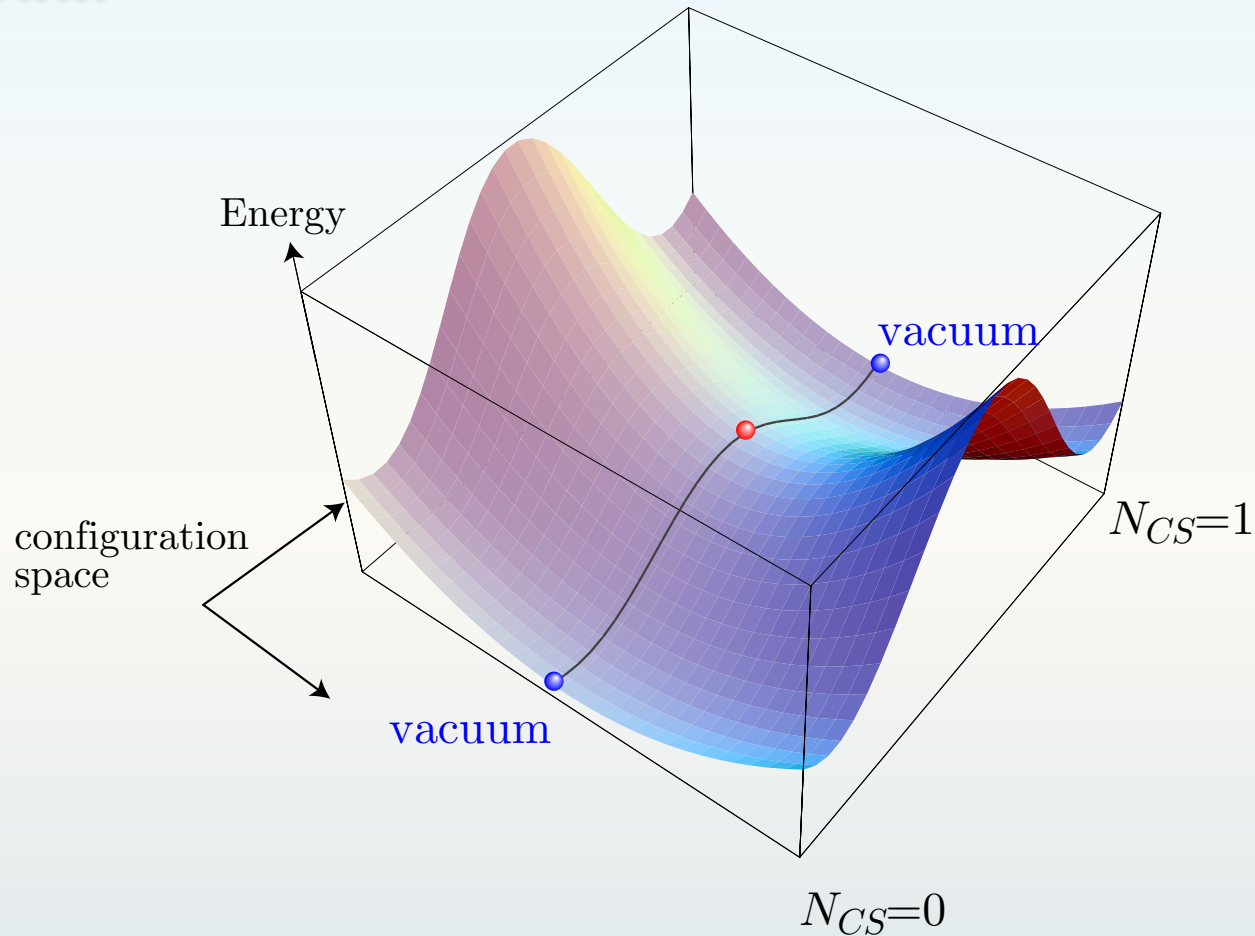
- (i) スファレロン過程が脱結合する前に、**B-Lが存在する。**
- (ii) B+Lを**電弱一次相転移で生成**し、且つ、
その後直ちにスファレロン過程が無効になる。

のいずれかでなければならない。

- (i) \longrightarrow **Leptogenesis**, (B-L)-violating GUTs, Affleck-Dine, ...
- (ii) \longrightarrow **Electroweak Baryogenesis**

Sphaleron解を求める

鞍点 = 最小エネルギー経路上の極大エネルギー配位



最小エネルギー経路 / (large) gauge trf. = noncontractible loop



球対称配位

場のトポロジー

Manton, Phys. Rev. D28 (1983) 2019

4-dim. SU(2) gauge-Higgs系

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - \lambda \left(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

$$D_\mu\Phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\Phi, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}$$

static energy ($A_0 = 0$ gauge)

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + (D_i\Phi)^\dagger D_i\Phi + \lambda \left(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right]$$

この E が有限である配位は, $r = |\mathbf{x}| = \infty$ で **真空配位**:

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = U(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_i^\infty(\mathbf{x}) = -\frac{i}{g} \partial_i U(\theta, \phi) U^{-1}(\theta, \phi)$$

ここで $U(\theta, \phi) : S^2 \rightarrow SU(2) \simeq S^3$ [$U(\theta = 0, \phi) = 1$ とする]

noncontractible loop configuration

↔ finite- E config. の 1-parameter family

$$U(\mu, \theta, \phi) : S^1 \times S^2 \rightarrow S^3 \quad (0 \leq \mu < \pi)$$

要請:
$$\begin{cases} U(\mu, \theta, \phi) = U(\mu, \theta + \pi, \phi) = U(\mu, \theta, \phi + 2\pi) & \text{for } \forall \mu \\ U(0, \theta, \phi) = U(\pi, \theta, \phi) = 1, \quad U(\mu, 0, \phi) = 1 & \text{vacuum} \end{cases}$$

$$U(\mu, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{i\mu}(\cos \mu - i \sin \mu \cos \theta) & e^{i\phi} \sin \mu \sin \theta \\ -e^{-i\phi} \sin \mu \sin \theta & e^{-i\mu}(\cos \mu + i \sin \mu \cos \theta) \end{pmatrix}$$

このとき $(\mu, \theta, \phi) \in S^3$ で、 $U(\mu, \theta, \phi)$ は $\pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z}$ により noncontractible

$$r = \infty \text{で}$$

$$\Phi^\infty(\mu, \mathbf{x}) = U(\mu, \theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_i^\infty(\mu, \mathbf{x}) = -\frac{i}{g} \partial_i U(\mu, \theta, \phi) U^{-1}(\mu, \theta, \phi)$$

となる全空間での対称性の高い配位を Ansatz とする:

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, r, \theta, \phi) &= \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ (1 - h(r)) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\mu} \cos \mu \end{pmatrix} + h(r) U(\mu, \theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ A_i(\mu, r, \theta, \phi) &= -\frac{i}{g} f(r) \partial_i U(\mu, \theta, \phi) U^{-1}(\mu, \theta, \phi) \end{aligned}$$

noncontractible loop に沿ったエネルギー [$\xi = gvr$: 無次元]

$$\begin{aligned} E[f, h](\mu) &= \frac{4\pi v}{g} \int_0^\infty d\xi \sin^2 \mu \left\{ 4 \left[f'(\xi)^2 + \frac{2}{\xi^2} (f - f^2)^2 \sin^2 \mu \right] + \frac{\xi^2}{2} h'(\xi)^2 + h^2 (1 - f)^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - h)^2 f^2 \cos^2 \mu - 2h(1 - h)f(1 - f) \cos^2 \mu + \frac{\lambda}{4g^2} \xi^2 (h^2 - 1)^2 \sin^2 \mu \right\} \end{aligned}$$

$\delta E[f, h](\mu = \pi/2) = 0 \longrightarrow$ 運動方程式 parameterは λ/g^2 だけ

$$\frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi) = \frac{2}{\xi^2} f(\xi) (1 - f(\xi)) (1 - 2f(\xi)) - \frac{1}{4} h^2(\xi) (1 - f(\xi)),$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dh(\xi)}{d\xi} \right) = 2h(\xi) (1 - f(\xi))^2 + \frac{\lambda}{g^2} \xi^2 (h^2(\xi) - 1) h(\xi).$$

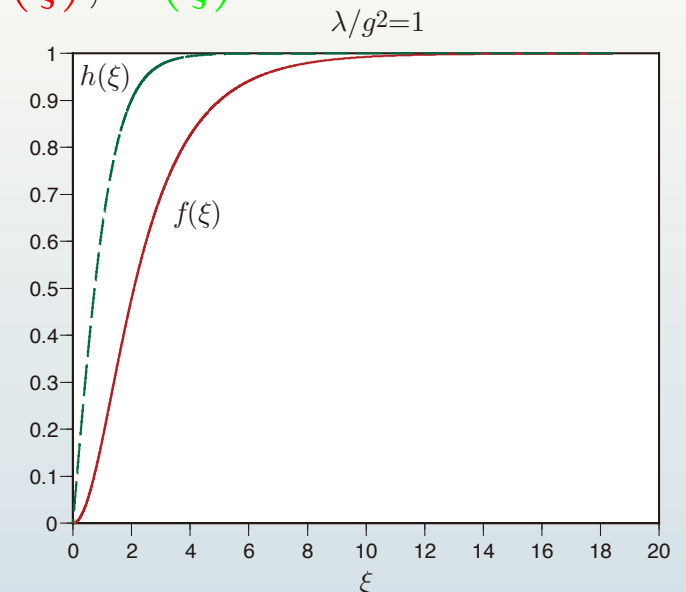
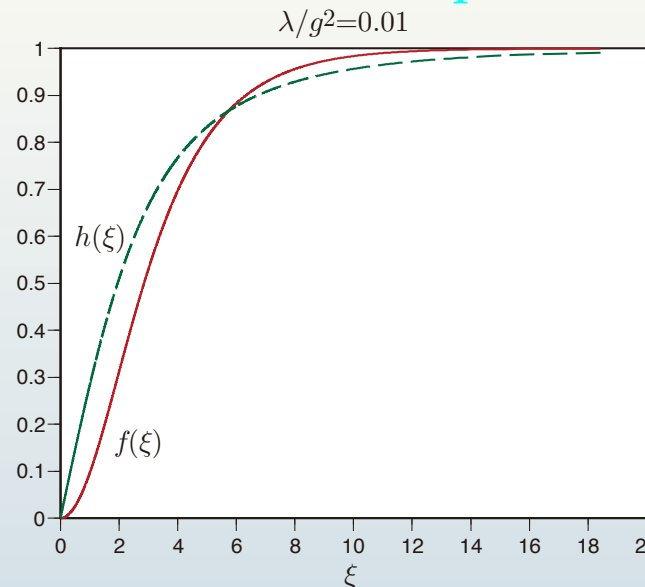
境界条件： $f(\xi = \infty) = h(\xi = \infty) = 1$, $f(\xi = 0) = h(\xi = 0) = 0$

数値解

$E/(4\pi v/g)$

profiles: $f(\xi)$, $h(\xi)$

λ/g^2	our results	K-M
10^{-3}	1.59196	1.61
10^{-2}	1.59848	1.67
10^{-1}	1.73543	1.83
1	2.00545	2.10
10	2.33495	2.41
10^2	2.56054	2.61
10^3	2.65718	2.68



Klinkhammer & Manton, Phys. Rev. D30 ('84)

得られた解のチェック

$$\frac{\delta^2 E[\Phi, A]}{\delta\phi_i \delta\phi_j} \Big|_{\Phi^{\text{sph}}, A^{\text{sph}}} : \text{fluctuation operator}$$

☑ zero modeの存在

Ansatzを使ったが、真の解である

☑ negative modeが1つだけ

Saddle-point configurationである

Akiba, Kikuchi and Yanagida, Phys. Rev. D40 ('89)
Carson, Li, McLerran and Wang, Phys. Rev. D42 ('90)

これらのmode functionは遷移率の評価にも必要

電弱バリオン数生成

- EW baryogenesisのアイデア
- 電弱相転移(EWPT)
- 生成されるバリオン数の評価

Electroweak Baryogenesis

標準理論やその拡張に基づく 検証可能 制限がきつい

(1) バリオン数保存の破れ sphaleron過程
但し、生成直後に凍結すべし

(2) CP対称性の破れ KM位相では不十分 (後述)
標準理論の拡張 SUSY-SM, extra Higgs, ...

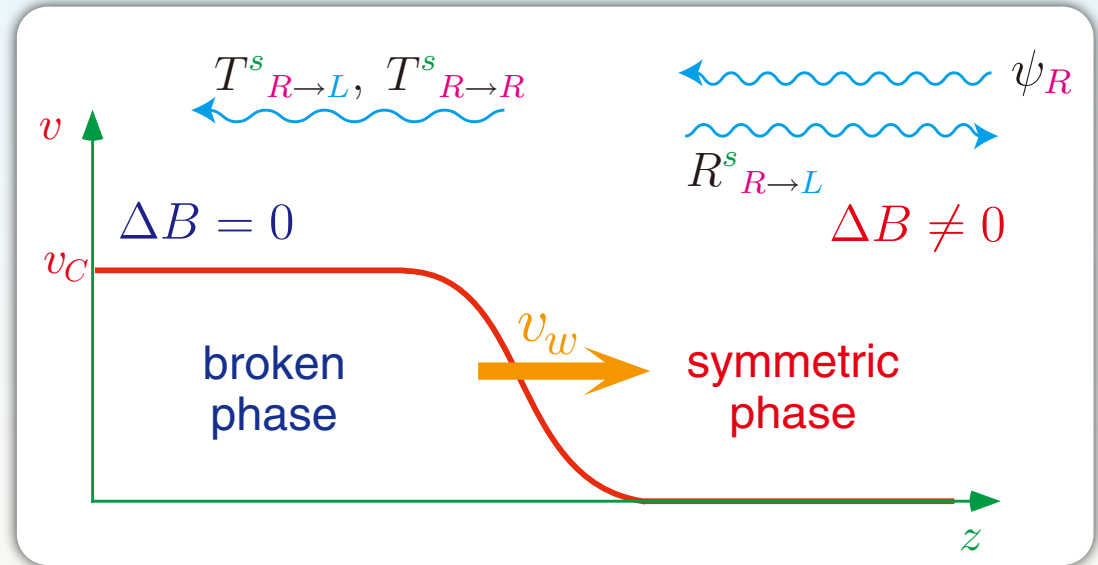
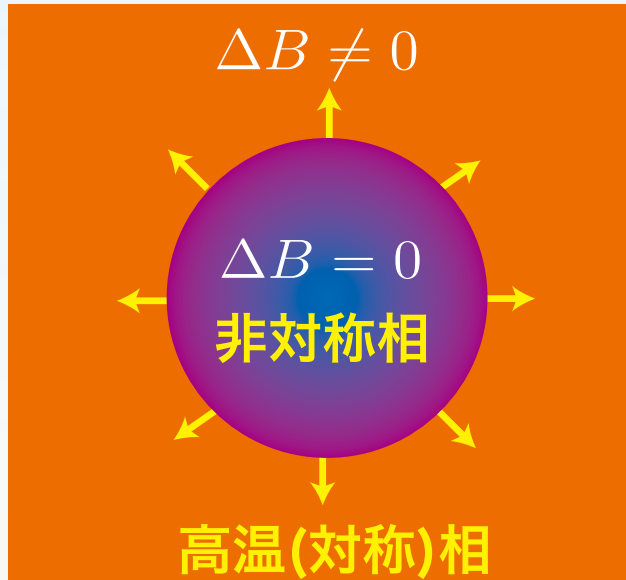
(3) 非平衡状態 T=100GeVでは、宇宙膨張は無視できる

$$\bar{t}_{EW} = 10\text{GeV}^{-1} < \bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{sym})} = 10^3\text{GeV}^{-1} \ll H(T)^{-1} = 10^{14}\text{GeV}^{-1}$$

電弱相転移が、相境界の形成・成長を伴う一次転移

標準理論の拡張が必要 (後述)

電弱バリオン数生成の概要



プラズマの粒子と bubble wall との CP を破る相互作用

q, l

Higgs profile

B-conserving

カイラル・フェルミオンの反射率の差 + bubble wall の運動

カイラル・チャージが対称相に注入 $(Q_L - Q_R)(R^s_{R \rightarrow L} - R^s_{L \rightarrow R})$

対称相で保存される量子数 Q_Y, I_3

対称相でのスファレロン過程にバイアス $\mu_B \neq 0$

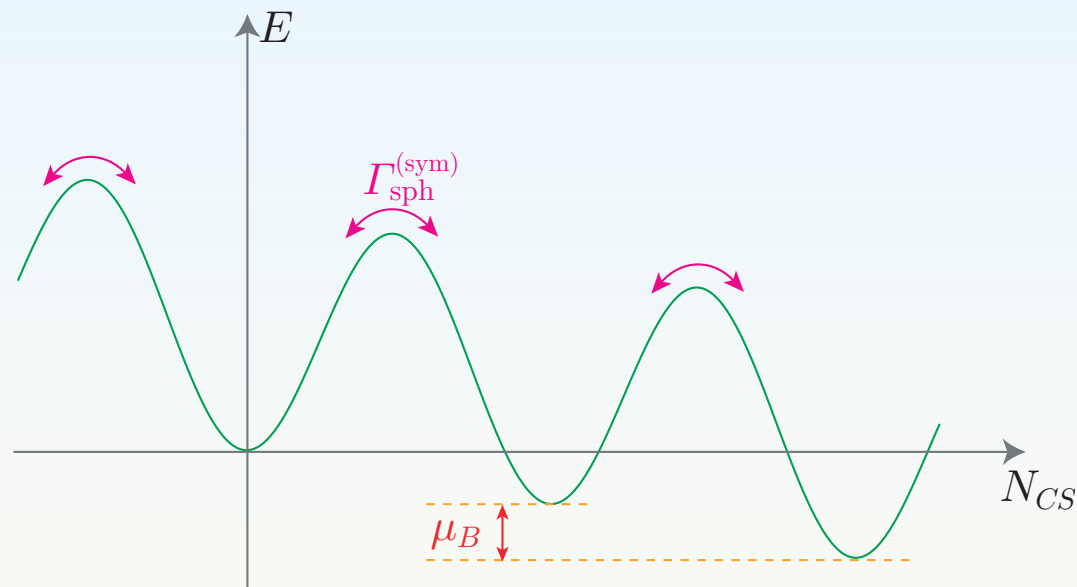


バリオン数生成

$$\dot{n}_B = -\frac{\mu_B}{T} \Gamma_{\text{sph}}^{(\text{sym})}(T)$$



相転移後、**非対称相で凍結**



$$\frac{v(T_C)}{T_C} > 1$$

sphaleron decoupling condition

Ref. KF, Prog. Theor. Phys. 96 ('96)

その他のreview: Rubakov and Shaposhnikov, Phys. Usp. 39 ('96) 461

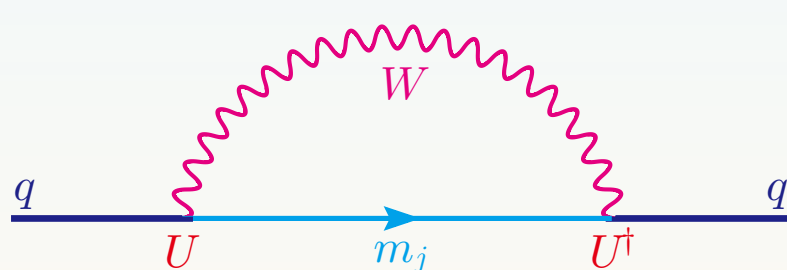
Riotto and Trodden, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 49 ('99) 35

Bernreuther, Lect. Notes Phys. 591 ('02) 237

標準理論だけでバリオン数生成は可能か？

★ $m_h > 114\text{GeV}$ → 相境界はクロスオーバー ~~非平衡~~

★ CP対称性の破れはKM位相だけ



$$m_i \neq m_j$$

→ dispersionに $O(\alpha_W)$ のCPV

Farrar and Shaposhnikov, Phys. Rev. D50 ('94)

weakの1-loopで小さいが、さらに、

QCD correction, wallとの多重散乱によるdecoherence

Gavela, et al., Nucl. Phys. B430 ('94)

Huet and Sather, Phys. Rev. D51 ('95)

$$\rightarrow \left| \frac{n_B}{s} \right| < 10^{-26}$$

1st order EWPT と CP violationのため拡張が必要

電弱相転移

$$T \simeq 100\text{GeV} \text{では, } \bar{t}_{EW} \simeq 10\text{GeV}^{-1} \ll H(T)^{-1} \simeq 10^{14}\text{GeV}^{-1}$$

→ 平衡系の統計力学が使える

相転移の静的性質

	磁性体(Landau現象論)	電弱理論
秩序変数	自発磁化 (M)	$\langle \Phi(x) \rangle = v$
自由エネルギー	$F(M; T) = a(T)M^2 + b(T)M^4$	Effective potential $V_{\text{eff}}(v; T)$
計算法	例. スピン模型の平均場近似	有限温度の場の理論

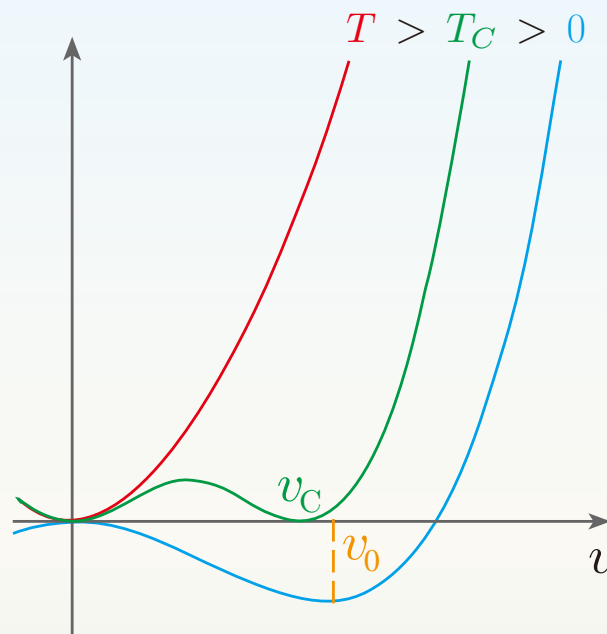
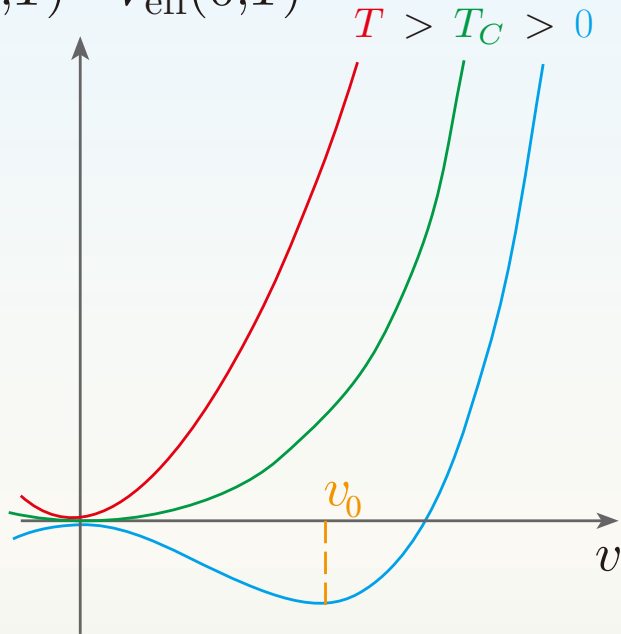
$$V_{\text{eff}}(v; T) = -\Gamma[\varphi(x) = v] / \int d^4x \quad \Gamma[\varphi] = \text{effective action}$$

$$\text{Tr}(e^{-H/T}) = N(T) \int_{\text{pbc}} [d\phi] \exp\left(-\int_0^{1/T} d^4x_E \mathcal{L}_E(\phi)\right) \quad \text{euclidean path integral}$$

$$\begin{cases} \phi(0, \mathbf{x}) = \phi(1/T, \mathbf{x}) & \text{boson} & k^0 = i\omega_n = i\pi 2nT \\ \psi(0, \mathbf{x}) = -\psi(1/T, \mathbf{x}) & \text{fermion} & k^0 = i\tilde{\omega}_n = i\pi(2n+1)T \end{cases}$$

自発的に破れているSU(2)xU(1)ゲージ対称性が高温で回復

$$V_{\text{eff}}(v;T) - V_{\text{eff}}(0;T)$$



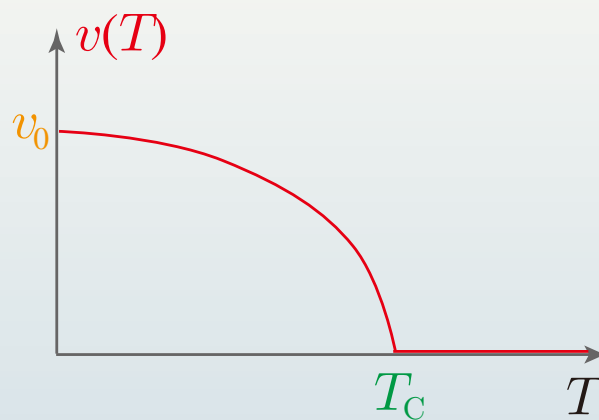
order parameter

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v(T) \end{pmatrix}$$

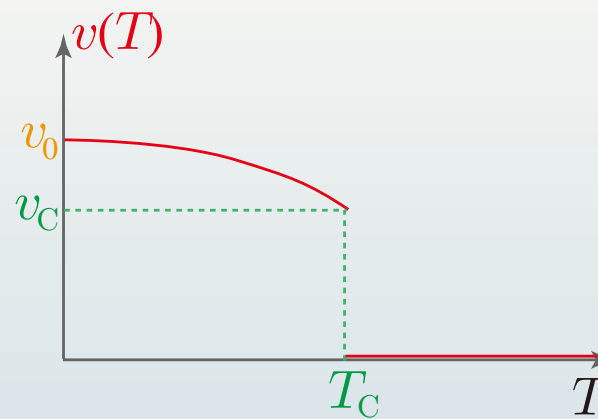
$$v_C \equiv \lim_{T \uparrow T_C} v(T) \neq 0$$



一次相転移



2nd order PT



1st order PT

標準理論

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{v}; T) = -\frac{1}{2}\mu^2 \mathbf{v}^2 + \frac{\lambda}{4} \mathbf{v}^4 + 2B \mathbf{v}^4 \left[\log \left(\frac{\mathbf{v}^2}{v_0^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + \bar{V}(\mathbf{v}; T)$$

$$B = \frac{3}{64\pi^2 v_0^4} (2m_W^4 + m_Z^4 - 4m_t^4)$$

$$\bar{V}(\mathbf{v}; T) = \frac{T^4}{2\pi^2} (6I_B(a_W) + 3I_B(a_Z) - 6I_F(a_W)) \quad a_A = \frac{m_A(\mathbf{v})}{T}$$

$$I_{B,F}(a) \equiv \int_0^\infty dx x^2 \log \left(1 \mp e^{-\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

高温展開 [$a = m/T \ll 1$]

IR nonanalyticity

$$I_B(a) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12} a^2 - \frac{\pi}{6} (a^2)^{3/2} - \frac{a^4}{16} \log \frac{\sqrt{a^2}}{4\pi} - \frac{a^4}{16} \left(\gamma_E - \frac{3}{4} \right) + O(a^6)$$

$$I_F(a) = \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24} a^2 - \frac{a^4}{16} \log \frac{\sqrt{a^2}}{\pi} - \frac{a^4}{16} \left(\gamma_E - \frac{3}{4} \right) + O(a^6)$$

$+T^4 a^2 \sim +T^2 v^2 \longrightarrow$ symmetry restoration at high-T

$T > m_W, m_Z, m_t$ として展開すると、

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{v}; T) \simeq D (T^2 - T_0^2) v^2 - ET v^3 + \frac{\lambda_T}{4} v^4$$

$$D = \frac{1}{8v_0^2} (2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2) \quad E = \frac{1}{4\pi v_0^3} (2m_W^3 + m_Z^3) \sim 10^{-2}$$

$$\lambda_T = \lambda - \frac{3}{16\pi^2 v_0^4} \left[2m_W^4 \log \frac{m_W^2}{\alpha_B T^2} + m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{\alpha_B T^2} - 4m_t^4 \log \frac{m_t^2}{\alpha_F T^2} \right]$$

$$T_0^2 = \frac{\mu^2 - 4Bv_0^2}{2D} \quad \log \alpha_{F(B)} = 2 \log(4)\pi - 2\gamma_E$$

T_C で $v = 0$ と縮退した極小が v_C に存在

$$v_C = \frac{2ET_C}{\lambda_T}$$

$$\Gamma_{\text{sph}}^{(\text{br})} < H(T_C) \iff \frac{v_C}{T} > 1$$

sphaleron decoupling condition

$$\longrightarrow \lambda \text{ に上限} \xrightarrow{m_h = \sqrt{2} \lambda v_0} m_h < 46 \text{ GeV}$$

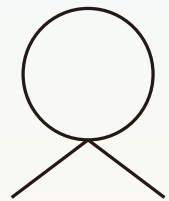
有限温度場の理論の摂動計算

高温では、弱結合でも近似が悪くなる

例 ϕ^4 theory

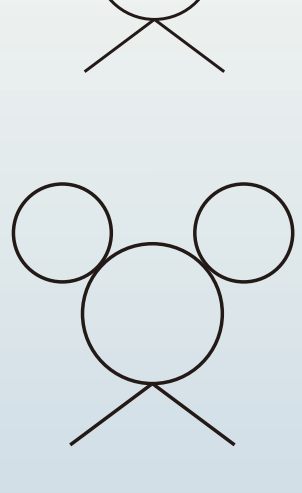
Dolan and Jackiw, Phys. Rev. D9 (1974)

2点関数(mass²)への温度補正 (高温展開) $a = \frac{m}{T} \ll 1$

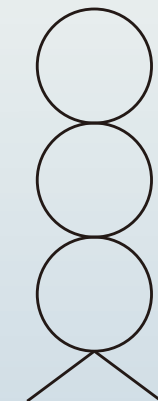
 $\propto \lambda T^2 I'_B(m^2/T^2) \sim \lambda T^2$

 $\sim \lambda T^2 \frac{\lambda T}{m}$

 $\sim \lambda T^2 \lambda \log \frac{T}{m}$

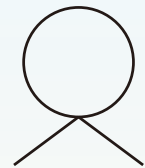
 $\sim (\lambda T^2)^2 \frac{\lambda T}{m^3}$

$\xrightarrow{\times \frac{m}{T}}$

 $\sim \lambda T^2 \left(\frac{\lambda T}{m} \right)^2$

★ leadingで、 m^2 に対して λT^2 の補正

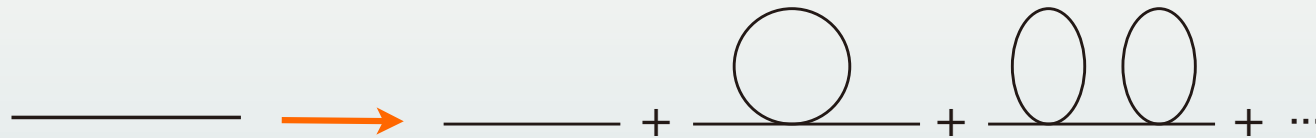
★ 高次では、bubble subdiagramの因子が多い方が効く



1つの因子について $\frac{\lambda T^2}{m^2}$ のべき

$\therefore T \gtrsim \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ で近似は無効

m^2 に対する λT^2 のleading correctionを取り入れる



propagatorで、 $m^2 \rightarrow m^2 + \Delta_T m^2 = m^2 + \frac{\lambda T^2}{24}$

‘resummation’

remarks

- パラメータが多いときは、何が効くかに注意

e.g. y_t^2, g_3^2 in $V_{\text{eff}}(v; T)$

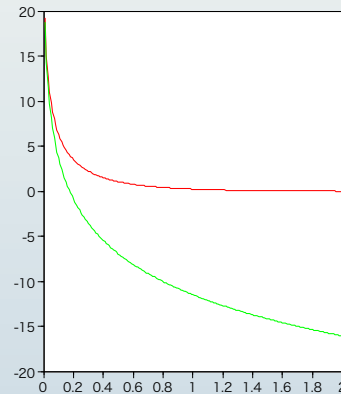
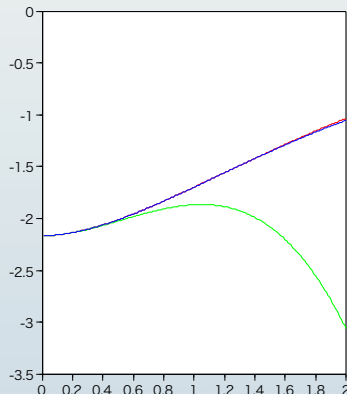
- massless fieldのloopに注意

IR singularity ← thermal massがcut

- gauge bosonは、縦波と横波でthermal massが違う

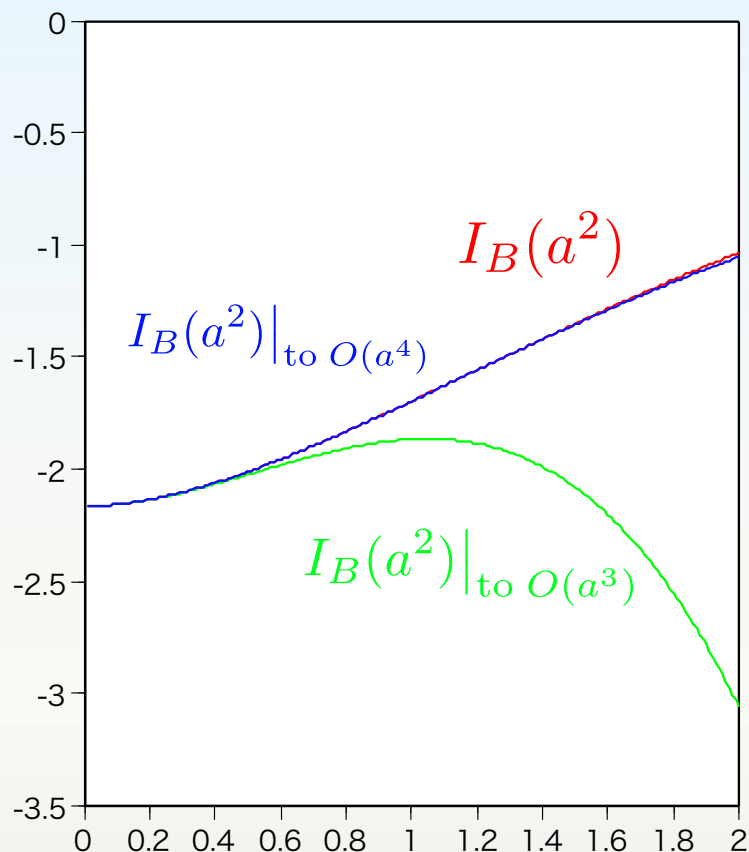
$$\Delta_T m_L^2 = \frac{g^2}{3} T^2 \text{ :electric mass} \quad \Delta_T m_T^2 = 0 \text{ :magnetic mass}$$

- 2-loop functionは高温展開の近似が悪い (近似式が無い)

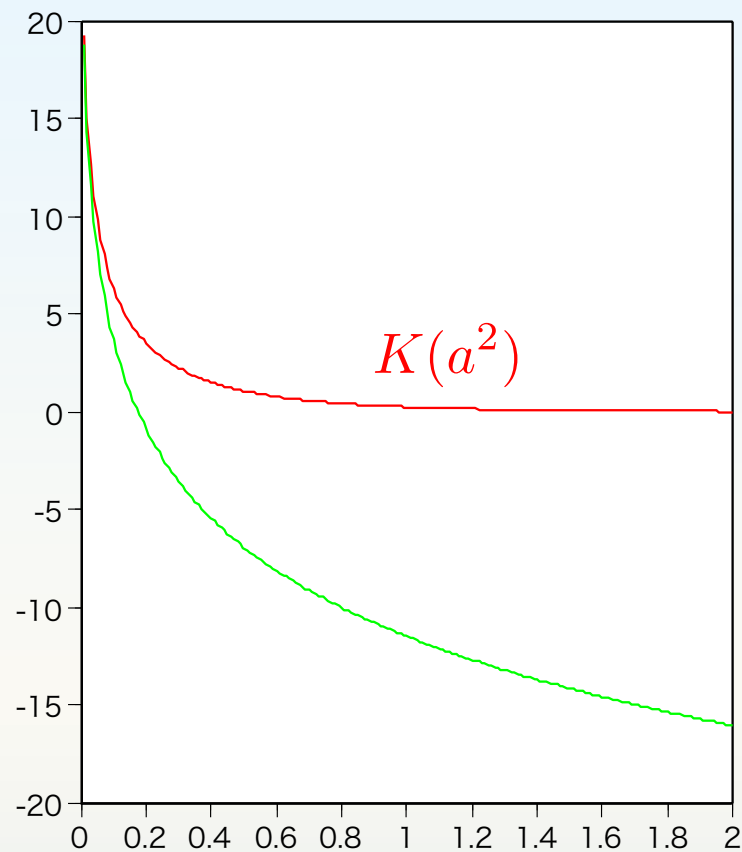


KF and Senaha, in progress

1-loop $I_B(a^2)$

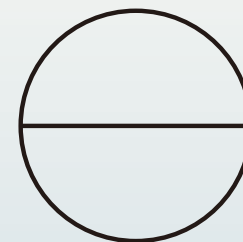


2-loop $K(a^2)$



$$I_B(a^2) \simeq -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}a^2 - \frac{\pi}{6}a^3 - \frac{a^4}{16} \left(\log \frac{a}{4\pi} + \gamma_E - \frac{3}{4} \right)$$

$$I_B(a^2) \simeq -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}a^2 - \frac{\pi}{6}a^3$$



$$K(a^2) \simeq -\frac{\pi^2}{3} (\log(a^2) + 3.48871)$$

格子理論によるMC計算

スカラー場 $\Phi(x)$ \longrightarrow 格子点 (サイト)

ゲージ場 $U_\mu(x) = e^{igA_\mu(x)}$ \longrightarrow リンク

$$Z(T) = \text{Tr} \left(e^{-H/T} \right) = \int_{\phi(1/T)=\phi(0)} [d\Phi dU_\mu] \exp(-S_E[\Phi, U])$$

標準理論 (1-doublet)

3次元系 高温極限 [Laine & Rummukainen, hep-lat/9809045]

4次元系 $m_h < 66.5 \pm 1.4\text{GeV}$ で一次転移 [Csikor, hep-lat/9910354]

それぞれ $m_h = 72.3 \pm 0.7\text{GeV}$
 $m_h = 72.1 \pm 1.4\text{GeV}$ に相転移のend point

電弱相転移が一次転移となるには

● boson loopからの寄与

$$V_{\text{eff}}(v; T) \sim -T (m(v)^2)^{3/2} \quad \leftarrow a^3\text{-term of } I_B(a^2)$$

Higgsと相互作用するbosonで、 $m(v)^2 \sim g^2 v^2$ (for $v \sim 0$)

2HDMのextra Higgs, SUSY-SMのsfermion

$$m(v)^2 = m_0^2 + g^2 v^2 \quad (m_0^2 \ll g^2 v_0^2)$$

2HDM with the discrete symmetry to avoid FCNC

Higgs const. mass $\simeq 0$ \longrightarrow 1-dim. order parameter space

KF, Kakuto, Takenaga, PTP91(1994)

MSSM

order parameters: $\langle \Phi_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_u \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 + iv_3 \end{pmatrix}$

$m_{H^\pm} > 200\text{GeV} \longrightarrow$ 相転移はSM-like

light Higgsの場合に、SM-likeでないPTを期待

$$\mathcal{M}_{\tilde{t}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{t}_L}^2 + \left(\frac{g_2^2}{8} - \frac{g_1^2}{24} \right) (v_1^2 - v_2^2) + \frac{y_t^2}{2} v_2^2 & \frac{y_t^2}{\sqrt{2}} (\mu v_1 + A_t v_2) \\ * & m_{\tilde{t}_R}^2 + \frac{g_1^2}{6} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{y_t^2}{2} v_2^2 \end{pmatrix}$$

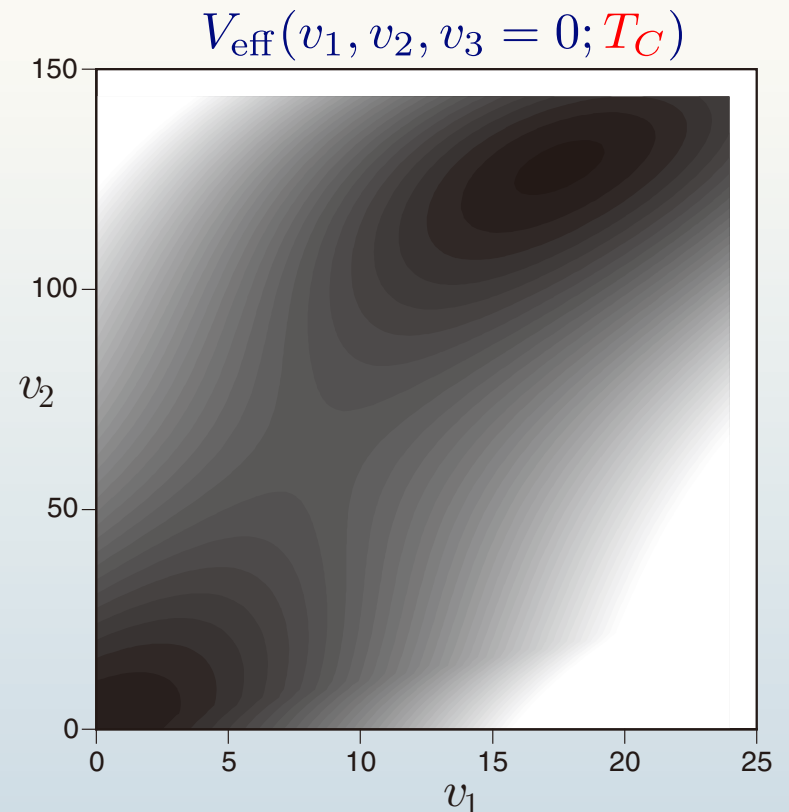
$m_{\tilde{t}_R}^2 = 0 \longrightarrow$ smaller eigenvalue

$$m_{\tilde{t}_1}^2 \sim O(v^2)$$

$$m_h < 105\text{GeV}, \quad m_{\tilde{t}_1} < m_t$$

$$\longrightarrow v_C/T_C > 1$$

$$m_{\tilde{t}_1} > 95.7\text{GeV} \text{ (95\%CL)}$$



Lattice MC studies

3-dim. effective theory

Laine et al. hep-lat/9809045

$m_{\tilde{t}_1} \lesssim m_t$ and $m_h \leq 110\text{GeV}$ \longrightarrow strong 1st order

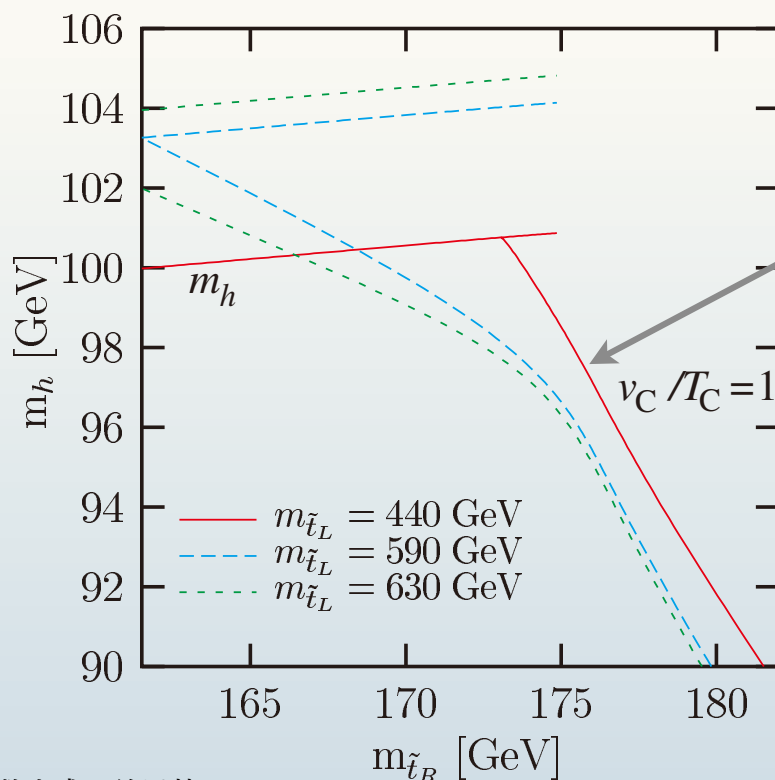
4-dim. theory

Csikor, et al. hep-lat/0001087;

Aoki, Csikor, Fodor, Ukawa, Phys.Rev. D 60 (1999)

$SU(3)$, $SU(2)$ gauge bosons, 2 Higgs doublets, stops, sbottoms

$A_{t,b} = 0$, $\tan \beta \simeq 6$ \longrightarrow errorの範囲内で摂動論と一致



$m_A = 500\text{GeV}$

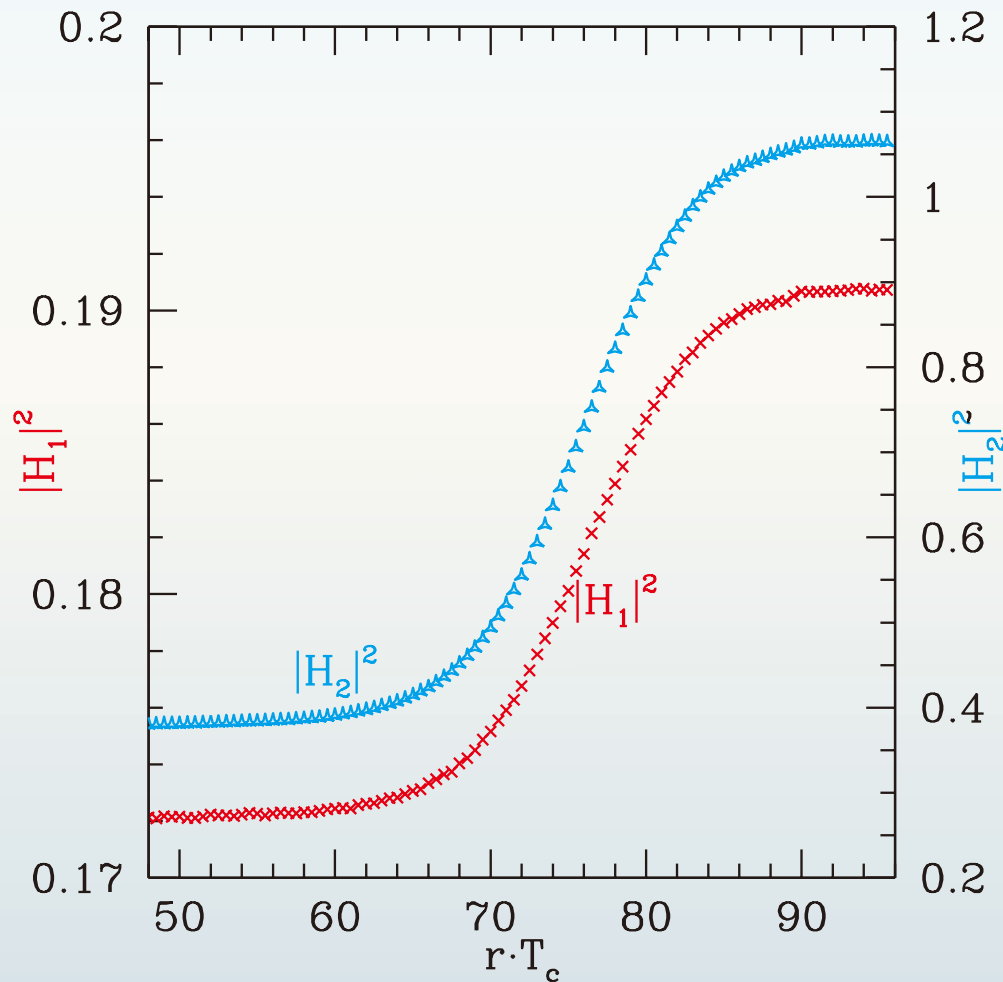
この線より下側で $\frac{v_C}{T_C} > 1$

max. $m_h = 103 \pm 4 \text{ GeV}$

for $m_{\tilde{t}_L} \simeq 560 \text{ GeV}$

bubble wall profile

free energy (V_{eff})をminimizeするように2つの相を繋ぐ



2相の間での $\beta = \tan^{-1} \frac{v_u}{v_d}$
の変化

$$\Delta\beta = 0.0061 \pm 0.0003$$

$$\Rightarrow \beta = \text{const.}$$

$$\text{wall width} \simeq \frac{11}{T_C}$$

● singlet scalarを含む理論の新しい型の相転移

naive expectation: $-\phi^3$ -term により一次転移になる(tree levelでも)

NMSSM

superpotential

$$W = \epsilon_{ij} \left(y_b H_d^i Q^j B - y_t H_u^i Q^j T + y_l H_d^i L^j E - \lambda N H_d^i H_u^j \right) - \frac{\kappa}{3} N^3$$

$\lambda \langle N \rangle \sim \mu$ in the MSSM

order parameters

$$\langle \Phi_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_u \rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}, \quad \langle n \rangle = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} v_n$$

tree-level Higgs potential

$$\begin{aligned} V_0 = & m_1^2 \Phi_d^\dagger \Phi_d + m_2^2 \Phi_u^\dagger \Phi_u + m_N^2 n^* n - \left(\lambda A_\lambda \epsilon_{ij} n \Phi_d^i \Phi_u^j + \frac{\kappa}{3} A_\kappa n^3 + \text{h.c.} \right) \\ & + \frac{g_2^2 + g_1^2}{8} \left(\Phi_d^\dagger \Phi_d - \Phi_u^\dagger \Phi_u \right)^2 + \frac{g_2^2}{2} \left| \Phi_d^\dagger \Phi_u \right|^2 \\ & + |\lambda|^2 n^* n \left(\Phi_d^\dagger \Phi_d + \Phi_u^\dagger \Phi_u \right) + \left| \lambda \epsilon_{ij} \Phi_d^i \Phi_u^j + \kappa n^2 \right|^2 \end{aligned}$$

Higgs sectorの比較

	SM	MSSM	NMSSM
Higgs	$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	Φ_d, Φ_u	Φ_d, Φ_u, n
physical	$H (= \phi^0 - v_0)$	H_1, H_2, A, H^\pm	$H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, H^\pm$
potential	$-\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$	$V_D(\Phi_d, \Phi_u) + V_{\text{soft}}$	$V_D(\Phi_d, \Phi_u) + V_F(\Phi_d, \Phi_u, n) + V_{\text{soft}}$

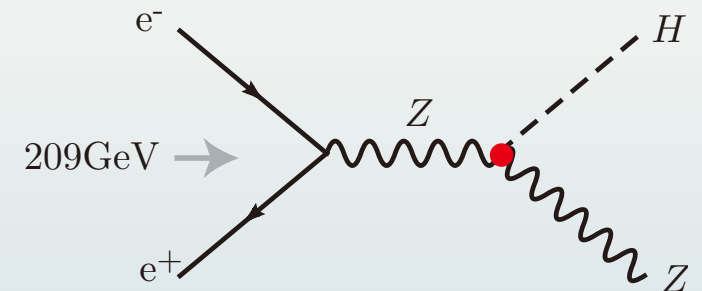
neutral Higgs bosonの質量(tree level)

SM: $m_H = \sqrt{2\lambda}v_0$ with a free parameter λ

MSSM: $m_{H_1} \leq \min \{m_Z, m_A\}$ $\xrightarrow{\text{量子補正}}$ $m_{H_1} < 135\text{GeV}$

実験からの制限: $m_H \geq 114\text{GeV}$ LEP II

g_{ZZH_1} を小さくして逃げる Light-Higgs scenario
CPX scenario



NMSSM: F-termの寄与で重くできる

NMSSMのHiggs系の特徴 --- MSSMの類似点と相違点

1. $v_n \rightarrow \infty$ with $\lambda v_n (\sim \mu)$ and κv_n fixed \longrightarrow MSSM
 $\longrightarrow v_n = O(100)\text{GeV}$ の場合は新しいことが期待できる
2. 5つのneutral scalar (3:CP-even, 2:CP-odd)
Light-Higgs scenarioが実現し易い
3. CP violation at the tree level $\text{Im}(\lambda A_\lambda e^{i(\theta+\varphi)})$, $\text{Im}(\kappa A_\kappa e^{3i\varphi})$, $\text{Im}(\lambda \kappa^* e^{i(\theta-2\varphi)})$

MSSMは階層性問題を解決するか？

EWSBのためには、soft mass parameterと μ がweak scale

NMSSMはsoft massがweak scaleであればよい

No-Lose Theorem for NMSSM Higgs Discovery at the LHC

Ellwanger, Gunion, Hugonie, hep-ph/0111179, 0305109

Phase transitions in the NMSSM

KF, Tao and Toyoda, PTP 114 ('05)

naive argument Pietroni, Nucl. Phys. B402 (1993)

tree-levelで v^3 項 $V_0 \ni - \left(\lambda A_\lambda \epsilon_{ij} n \Phi_d^i \Phi_u^j + \frac{\kappa}{3} A_\kappa n^3 + \text{h.c.} \right)$

order parameters :
$$\begin{cases} v_d = v \cos \beta(T) = y \cos \alpha(T) \cos \beta(T), \\ v_u = v \sin \beta(T) = y \cos \alpha(T) \sin \beta(T), \\ v_n = y \sin \alpha(T) \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{1}{2} \left((m_1^2 \cos^2 \beta + m_2^2 \sin^2 \beta) \cos^2 \alpha + m_N^2 \sin^2 \alpha \right) y^2 - \left(R_\lambda \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + \frac{1}{3} R_\kappa \sin^3 \alpha \right) y^3 + \dots$$

→ 強い一次転移？

1変数 y によるparametrizationはできない

doubletとsingletの間の対称性は無い

相転移の次数は空間の次元や内部対称性による

universality class

可能な相と相転移

phase	order parameters	symmetries
EW	$v \neq 0, v_n \neq 0$	fully broken
I, I'	$v = 0, v_n \neq 0$	local $SU(2)_L \times U(1)_Y$
II	$v \neq 0, v_n = 0$	global $U(1)$
SYM	$v = v_n = 0$	$SU(2)_L \times U(1)_Y, \text{ global } U(1)$

global $U(1)$: $v_u e^{i\theta} = v_2 + iv_3 \mapsto e^{i\alpha}(v_2 + iv_3)$ in the subspace of $v_n = 0$

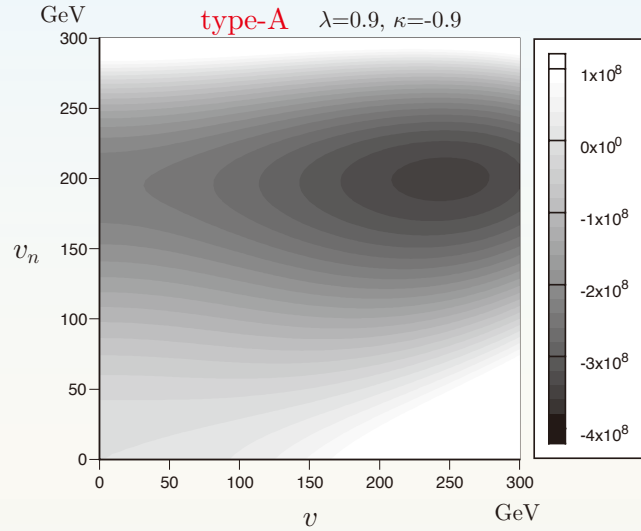
phase-I : heavy Higgs

phase-I' : light Higgs

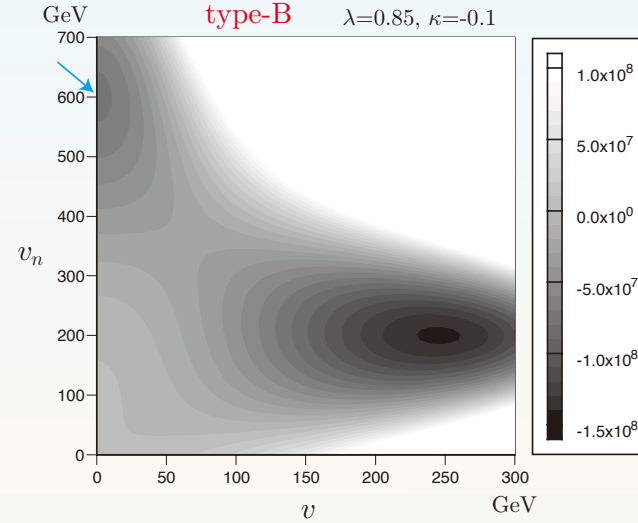
reduced effective potential (doublet-singlet平面でのV_{eff})

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(v, v_n; T) = V_{\text{eff}}(v \cos \beta(T), v \sin \beta(T), 0, v_n, 0; T) - V_{\text{eff}}(0, 0, 0, 0, 0; T)$$

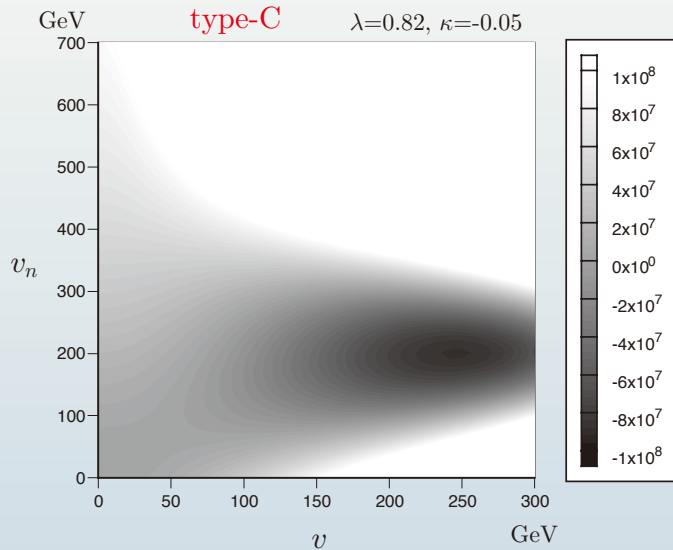
A: SYM → I → EW



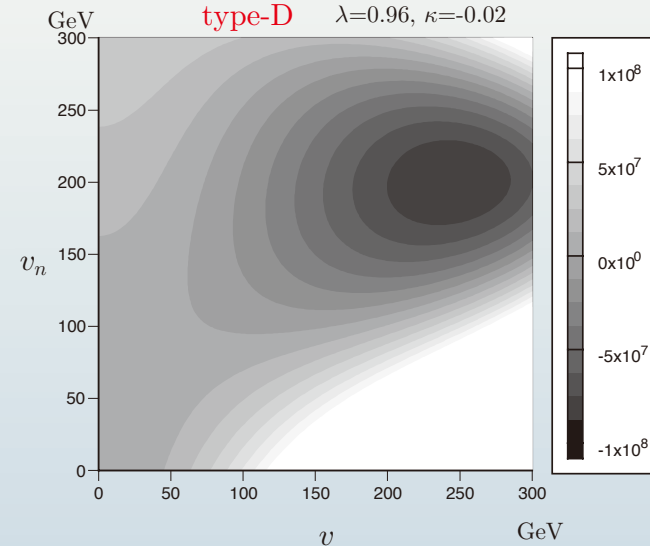
B: SYM → I' → EW



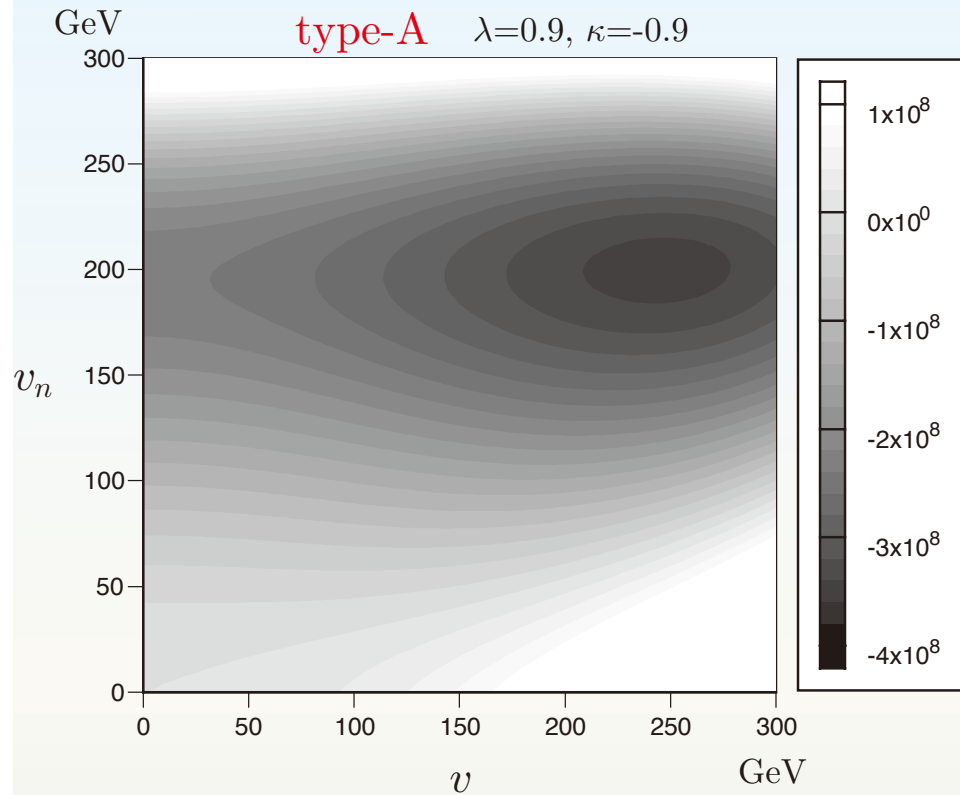
C: SYM → II → EW



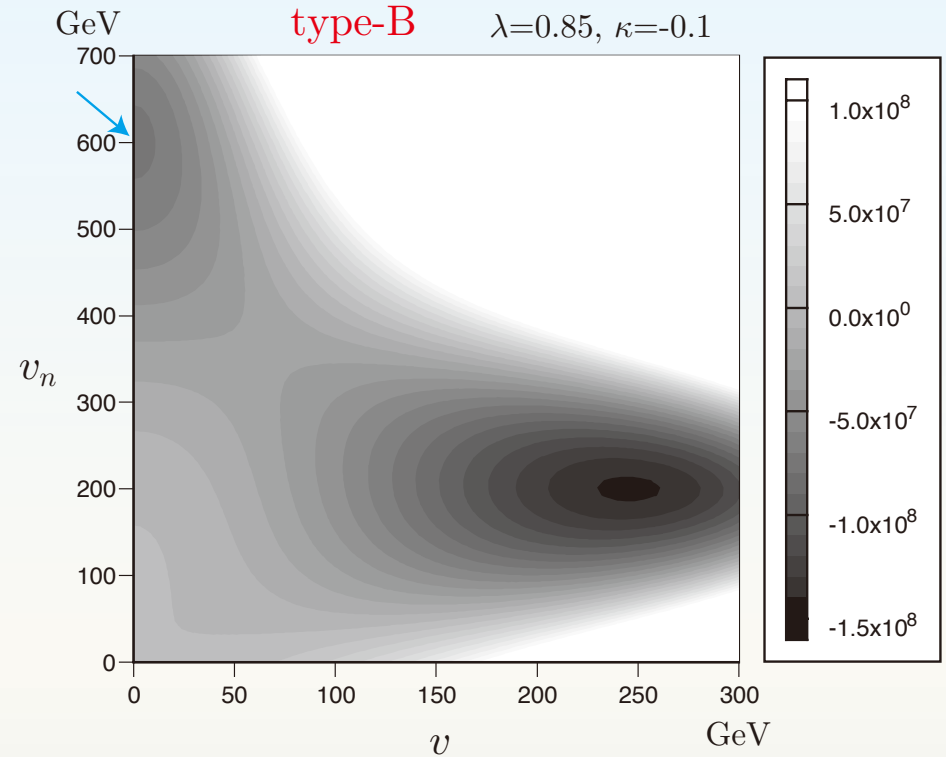
D: SYM → EW



A: SYM \rightarrow I \rightarrow EW



B: SYM \rightarrow I' \rightarrow EW



MSSM-like

$v_n = \text{const.}$ に沿って転移

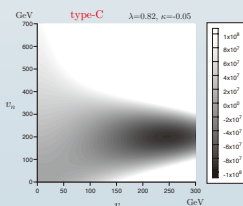
一次転移となるには、
light stopが必要

新しい型の2-stage PT

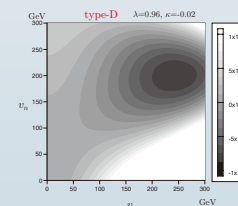
$(0, v_n(T_{C+}))$ から $(v(T_{C-}, v_n(T_{C-}))$ へ跳ぶ

light stop無しに強い一次転移

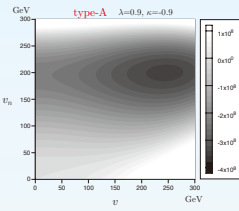
C: SYM \rightarrow II \rightarrow EW



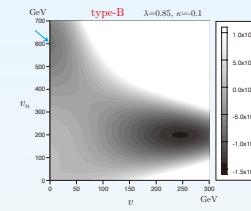
D: SYM \rightarrow EW



A: SYM \rightarrow I \rightarrow EW



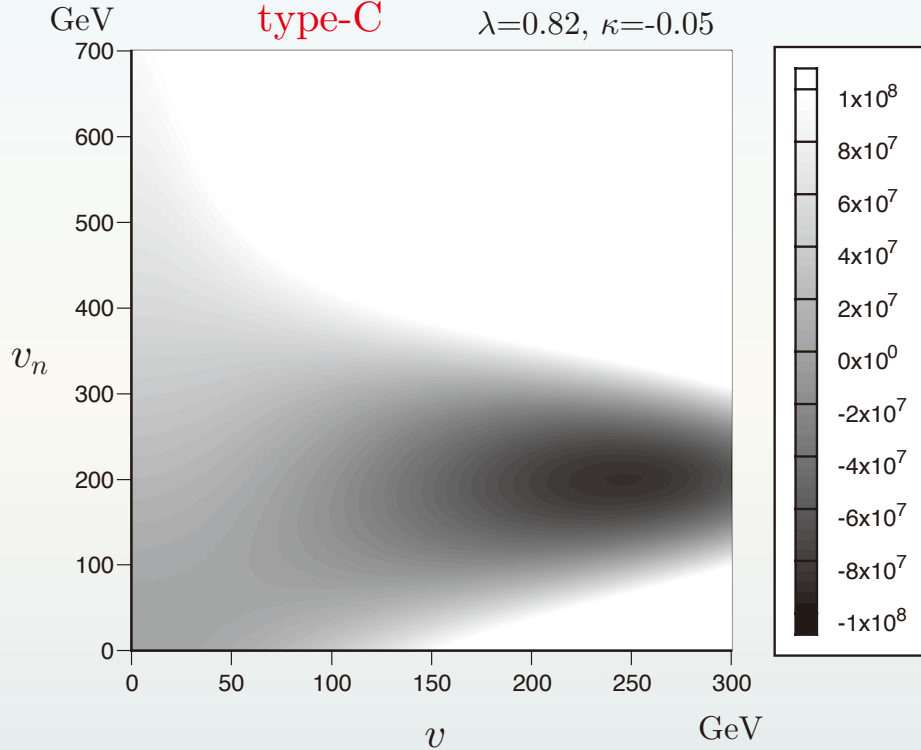
B: SYM \rightarrow I' \rightarrow EW



C: SYM \rightarrow II \rightarrow EW

type-C

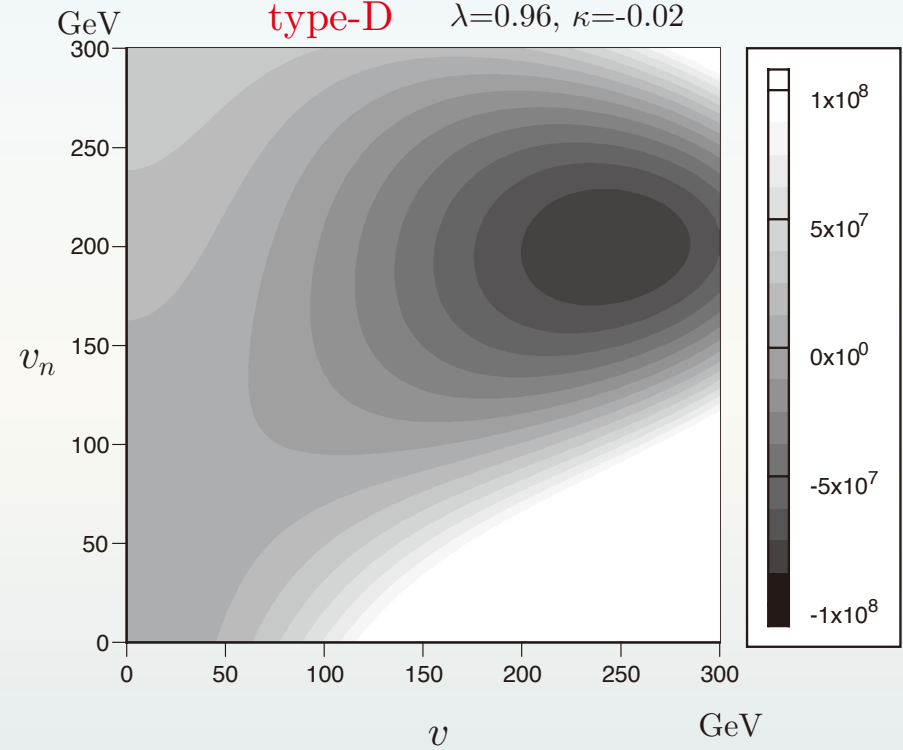
$\lambda=0.82, \kappa=-0.05$



D: SYM \rightarrow EW

type-D

$\lambda=0.96, \kappa=-0.02$



新しい型の2-stage PT

EWPTは $v_n=0$ に沿う

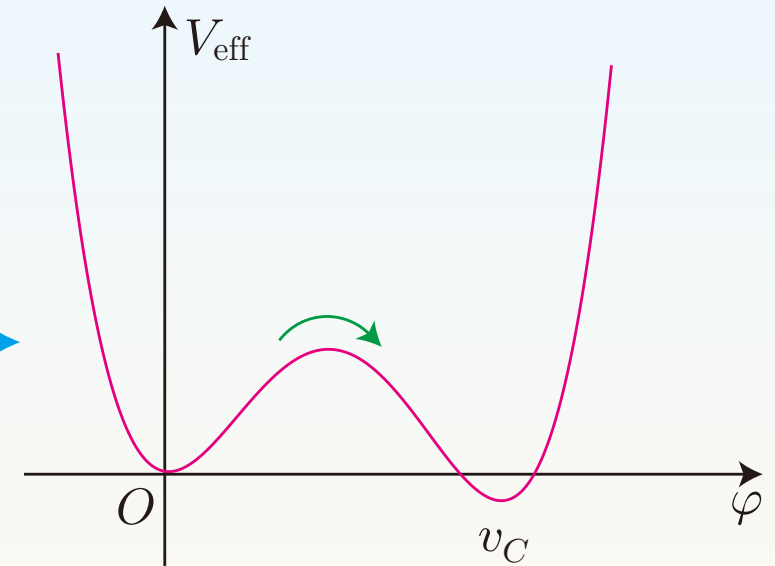
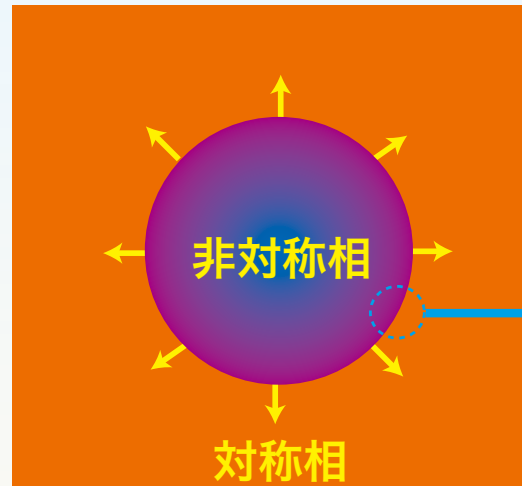
1-stage PT

fine tuneで実現

どちらも、一次転移となるには、light stopが必要

一次相転移のダイナミクス

対称相（高温相）内に
非対称相（低温相）の
泡の形成と成長



Langer, Ann. Phys. 41 ('67)

単位時間・単位体積当たりの核形成率 $I(T) = I_0 e^{-\Delta F(T)/T}$

半径 r の泡に対して
$$\Delta F(T) = \frac{4\pi}{3} r^3 [p_s(T) - p_b(T)] + 4\pi r^2 \sigma$$

圧力 $\left(p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -V_{\text{eff}} \right)$ $p_s(T) = -V_{\text{eff}}(0; T) < p_b(T) = -V_{\text{eff}}(v(T); T)$

表面エネルギー密度
$$\sigma = \int dz \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2$$

critical bubble

成長と収縮の境目

2つの相を繋ぐ鞍点解

$$\frac{\partial \Delta F(T)}{\partial r} = 0 \longrightarrow r_*(T) = \frac{2\sigma}{p_b(T) - p_s(T)} \quad \text{critical bubble radius}$$

$r_* >$ correlation length ($\sim m_\varphi^{-1}$)ならば、古典統計的取り扱いOK

相転移の進み方

1. $T_N < T_C$ (過冷却)で、熱的揺らぎにより $I(T)$ の確率で半径 r の泡が形成

2. $r > r_*$ の泡が成長する

成長速度 $v(t)$

Liu, McLerran, Turok, Phys. Rev. D46 ('92)

3. 全空間がbroken phaseになったところで完了

SU(5) GUT

Guth and E. Weinberg, Phys. Rev. D28 ('81)

★ SM with a light Higgs

Carrington and Kapusta, Phys. Rev. D47 ('93)

$f(t)$: t の時点で非対称相に変えられた体積の割合

$V(t', t)$: 時刻 t' で形成された1つのbubbleの時刻 t での体積

時刻 t_C で温度が T_C になった後の非対称相の割合:

$$f(t) = \int_{t_C}^t dt' I(T(t')) [1 - f(t')] V(t', t)$$

ここで $V(t', t) = \frac{4\pi}{3} \left[r_*(T(t')) + \int_{t'}^t dt'' v(T(t'')) \right]^3$

$v(T)$: wall velocity $a(t) \propto t^{1/2} \propto T^{-1}$

SM 1-loop V_{eff} を用いて $f(t)$ を数値計算

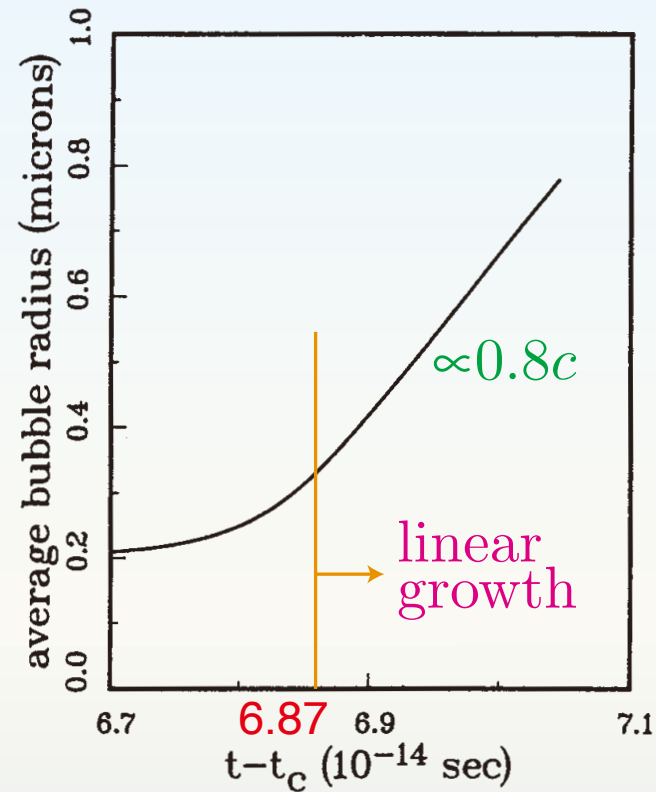
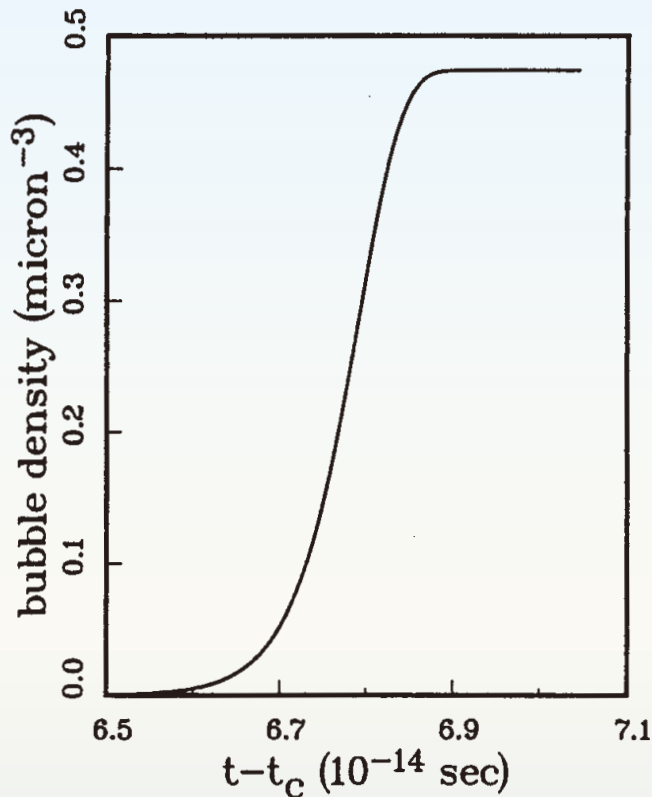
$$m_h = 60\text{GeV}, \quad m_t = 120\text{GeV}$$



平均的なbubbleの半径、体積の時間発展

$t - t_C = 6.5 \times 10^{-14} \text{sec}$ で泡の形成が始まる

[cf. $\bar{t}_{EW} = 10^{-26} \text{sec}$]

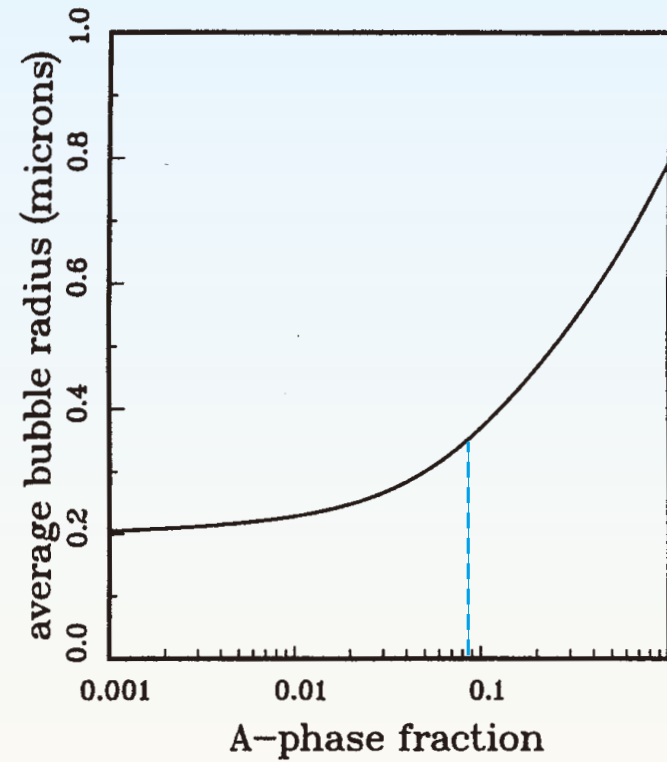
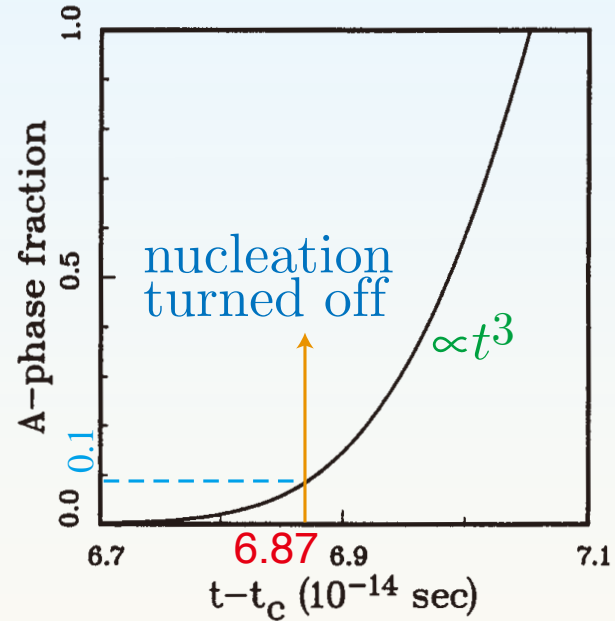


典型的な泡の半径 $r = 0.3 \mu\text{m}$ \longleftrightarrow Horizon size $H^{-1} \simeq 7.1 \times 10^{12} \text{GeV}^{-1}$

Horizon volume内の泡の数 $\simeq 3 \times 10^{11}$

過冷却は非常に小さい: $\frac{T_C - T_N}{T_C} \simeq 2.5 \times 10^{-4}$ [cf. 水→氷の過冷却 $O(10^{-2})$]

$f(t)$ の時間発展



→ 宇宙の体積の**90%**は**泡の成長**で非対称相に転移

弱い一次転移

v_C/T_C が小さい
2相間のバリアが低い

→ { 泡の**成長**より**形成**で転移が進む
厚い bubble wall
2つの相の間の**ゆらぎ**

$V_{\text{eff}}(v; T)$ が分かると、

$$v_C/T_C \quad (v_N/T_N)$$

critical bubble

EOM with $V_{\text{eff}}(v; T)$

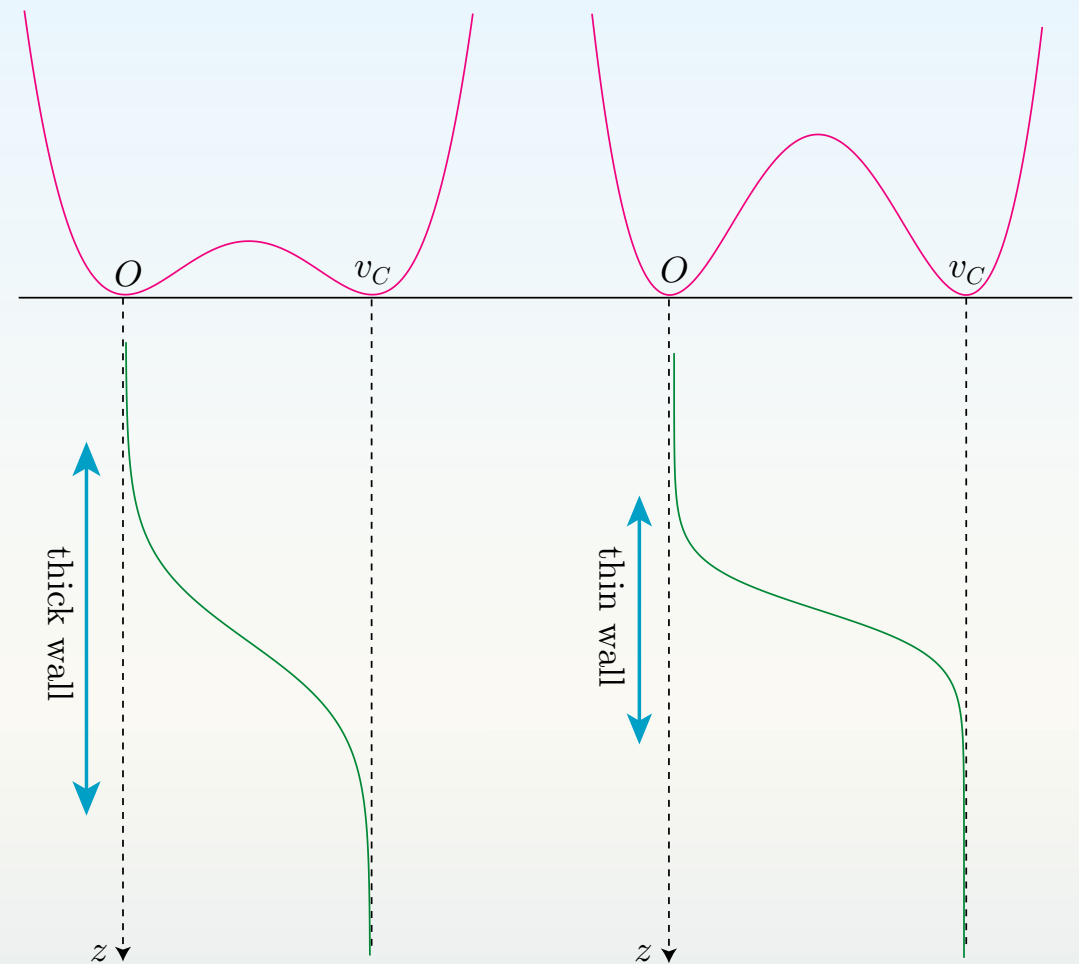
$$\text{wall width} \quad \Delta(T) \simeq \frac{1-30}{T}$$

$$\Delta(T = 100\text{GeV}) \sim 10^{-15}\text{cm}$$



$$r_* \simeq 10^{-5}\text{cm}$$

bubble wallを
平面と近似できる



多次元秩序変数の場合のEWPTダイナミクスの解析は無い

critical bubble and sphaleron decoupling in the MSSM: KF and Senaha, Phys.Rev. D79 (2009)

CP対称性の破れ

★ scalar self-interactionの複素パラメータ

$\lambda_{6,7}$ in 2HDM; $\mu B, A$ in the MSSM

★ complex Majorana mass

gaugino mass, μ in the MSSM

★ スカラー場の期待値が複素数

複数のスカラー場の期待値の相対位相

バリオン数生成に効くのはbubble wall近傍

これらの位相のある組合わせがCP対称性を破る

$\text{Im}(\mu M_2), \text{Im}(\mu A_t), \dots$

EDM, decay asym.等から制限

生成されるバリオン数の評価

2-Higgs doublet model

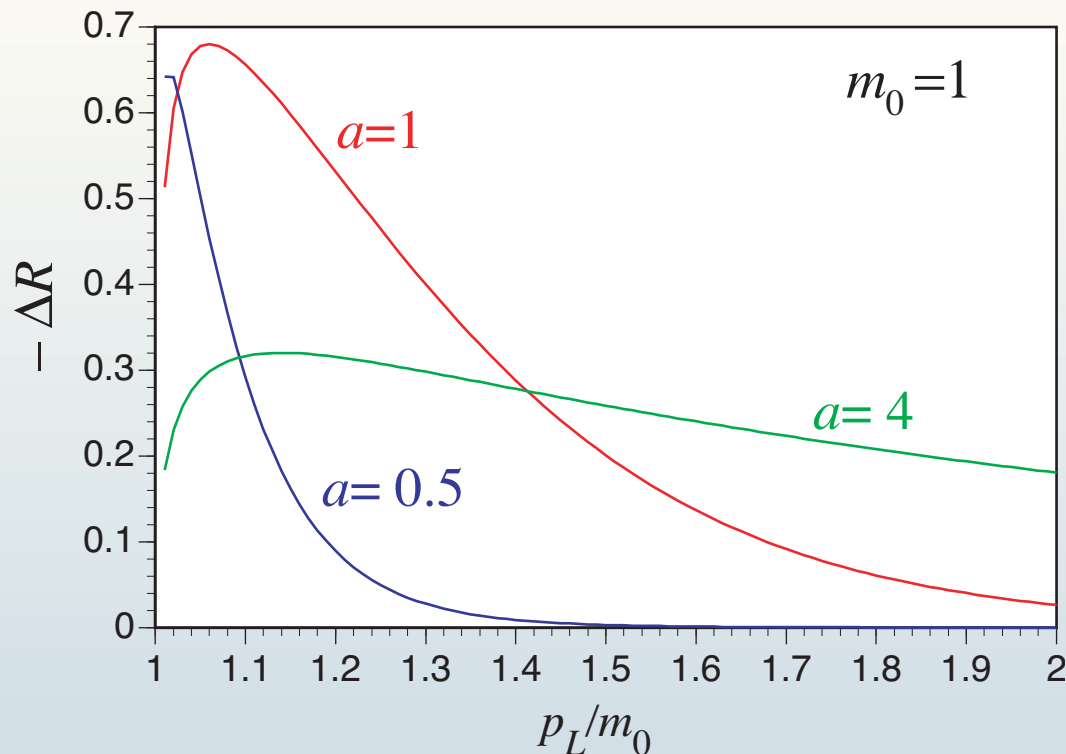
空間に依存するCP位相を持つbubble wall profileを仮定

$$(i\gamma \cdot \partial - m(z)) \psi(x) = 0$$

$$m(z) = m_0 \frac{1 - \tanh(az)}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}[1 + \tanh(az)]}$$

非対称相($z = -\infty$)ではCP保存

$$\Delta R \equiv R^s_{R \rightarrow L} - R^s_{L \rightarrow R}$$



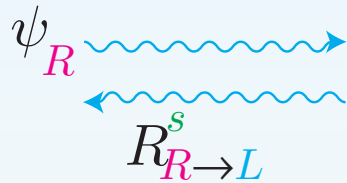
$$\text{wall width} = \frac{1}{a}$$

\simeq wave length of the carrier

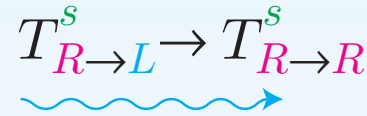
↓

$$\Delta R = O(1)$$

symmetric phase



broken phase



chiral fermionの反射・透過



対称相に流れ込むflux

bubble wallの静止系で

$$F_Q^i = \frac{Q_L^i - Q_R^i}{4\pi^2 \gamma} \int_{m_0}^{\infty} dp_L \int_0^{\infty} dp_T p_T [f_i^s(p_L, p_T) - f_i^b(-p_L, p_T)] \Delta R\left(\frac{m_0}{a}, \frac{p_L}{a}\right)$$

$$f_i^s(p_L, p_T) = \frac{p_L}{E} \frac{1}{\exp[\gamma(E - v_w p_L)/T] + 1}$$

$$f_i^b(-p_L, p_T) = \frac{p_L}{E} \frac{1}{\exp[\gamma(E + v_w \sqrt{p_L^2 - m_0^2})/T] + 1}$$

$$E = \sqrt{p_L^2 + p_T^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_w^2}}$$

$$Q_L = Q_R \implies F_Q = 0$$

symmetric phaseに貯まるchargeの評価

diffusion eq. $\dot{Q}_i(t, \mathbf{x}) = D_{Q_i} \nabla^2 Q_i - \sum_j \Gamma_{ij} c_j Q_i + [\text{source term}]$

\uparrow
 F_{Q_i}

D_Q : Q のdiffusion const. $\sim (\text{mean-free pathの数倍})^{-1}$

Γ_{ij} : 反応過程による Q_i の転換率 c_j : 統計因子

Cohen, Kaplan, Nelson, Phys. Lett. B336 ('94); Joyce, Prokopec, Turok, Phys. Rev. D53 ('96)

非平衡定常状態 ($\dot{Q}_i(t, \mathbf{x}) = 0$)で、**近似的に保存される量** ($\Gamma \simeq 0$)



symmetric phaseに残るchargeの総量は
 D_Q と流入するflux (source term)で決まる

'charge' バリオン数そのものではない

$B = \text{vectorlike quantum number}$

chiral chargeでsymmetric phaseでwashoutされないもの

Y and I

$$\bar{t}_{EW} < \text{flux流入の時間スケール} \sim \frac{\text{wall width}}{v_w} \simeq \frac{10 - 100}{T} \simeq (1 - 10)\text{GeV}^{-1}$$

$$< \bar{t}_{\text{sph}}^{(\text{sym})} \simeq \frac{1}{\alpha_W^4 T} \sim 10^3 \text{GeV}^{-1}$$

sphaleron過程以外の素過程は化学平衡

対称相で素過程が化学平衡の状態で、

過剰に Y が注入されたときに

他の量子数はどう変化するか？

B

Symmetric phaseでB=L=0である状態を考える

(近似的に)保存される量子数 $Q^a = \{B - L, Y, I_3, B\} \leftrightarrow \mu_{B-L}, \mu_Y, \mu_{I_3}, \mu_B$

各粒子の数密度 $n_i = \frac{T^2}{6} k_i \mu_i = \frac{T^2}{6} k_i \sum_a q_i^a \mu_{Q^a}$ $k_i = \begin{cases} 1 & \text{:fermion} \\ 2 & \text{:boson} \end{cases}$

例えば、 $n_{u_L(d_L)} = \frac{T^2}{6} \left(\frac{1}{3} \mu_B + \frac{1}{3} \mu_{B-L} + \frac{1}{6} \mu_Y + (-) \frac{1}{2} \mu_{I_3} \right)$

→ 量子数の期待値 $Q^a = \sum_i q_i^a n_i = \frac{T^2}{6} \sum_{i,b} k_i q_i^a q_i^b \mu_{Q^b}$

$B = L = 0$ を課すと、 μ_Y, μ_{B-L} が μ_B で表される。

$$\mu_B = \frac{Y}{(N_H + 5/3)T^2} \quad N_H = \#(\text{Higgs doublets})$$

hyper chargeの流入によりBに対するバイアスが生じた

生成されるバリオン数

$$n_B = -3 \frac{\Gamma_{\text{sph}}^{(\text{sym})}}{T} \int dt \mu_B = \frac{3\Gamma_{\text{sph}}^{(\text{sym})}}{(N_H + 5/3)T^3} \int_{-\infty}^{z/v_w} dt \rho_Y(z - v_w t)$$

$v_w = \text{const.}$ is assumed

$\rho_Y(z)$ = wallから距離 z の位置での Y -density

右辺の積分

=無限の過去から現在の位置 z までwallが動く間に貯まる Y の総量

$$\int_{-\infty}^{z/v_w} dt \rho_Y(z - v_w t) = \frac{1}{v_w} \int_0^{\infty} dz \rho_Y(z) \simeq \frac{F_Y \tau}{v_w}$$

τ = 散乱された粒子がwallに捕まるまでに走る時間 \simeq diffusion length

$$\frac{n_B}{s} \simeq 3\mathcal{N} \frac{100}{\pi^2 g_* S} \cdot \kappa \alpha_W^4 \cdot \frac{F_Y}{v_w T^3} \cdot \tau T$$

$$\tau \simeq \text{mean-free path} \longrightarrow \tau T \simeq \begin{cases} 1 & \text{for quarks} \\ 10^{2-3} & \text{for leptons} \end{cases}$$

↑
全断面積を用いて評価

MC simulation : 前方散乱する確率が高い

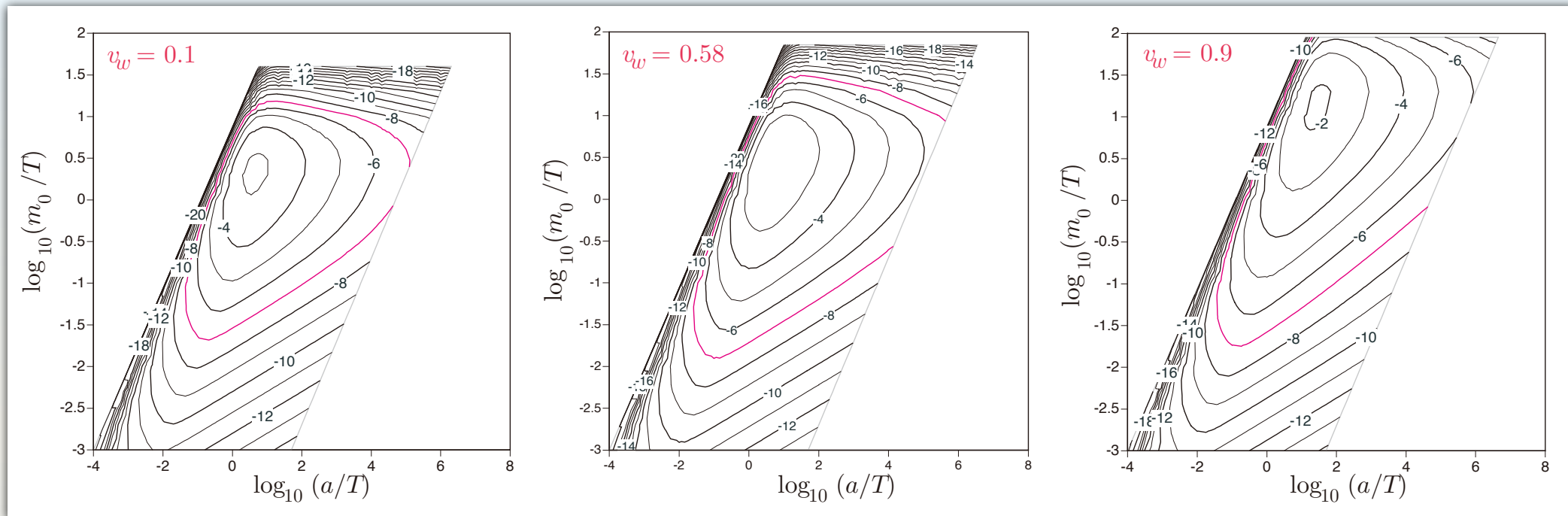
top quarkに対して $\tau T = 10^{1-3}$ max at $v_w \simeq 1/\sqrt{3}$

for the optimal case

$$\frac{n_B}{s} \simeq 10^{-3} \cdot \frac{F_Y}{v_w T^3}$$

$$\frac{F_Y}{v_w T^3} = O(10^{-7}) \longrightarrow \text{十分なバリオン数非対称性}$$

$\frac{F_Q}{T^3(Q_L - Q_R)}$ のlog plot (at $T=100\text{GeV}$)



このtoy modelではCP位相を $O(1)$ にしているが、 10^{-3} でもOK

Beyond the toy model

- bubble wallのprofileと速度
- wall近傍のCP位相
- 何がcarrierになるか

レプトン数生成

heavy Majorana neutrinoの崩壊によるレプトン数生成

thermal leptogenesis

heavy Majorana neutrinoが初期宇宙の高温状態で作られる

最高温度 = Reheating temperature

レプトン数の計算法は、GUT baryogenesisと同じ

nonthermal leptogenesis

heavy Majorana neutrinoをinflatonのdecayまたはpreheatingで作る

以下ではthermal leptogenesisを紹介

review articles

- Buchmüller, Di Bari and Plümacher, Ann. Phys. 315 (2005) 305
- Davidson, Nardi and Nir, Phys. Rep. 466 (2008) 105
- Pilaftsis, J. Phys. Conf. Ser. 171 (2009) 012017 [hep-ph/0904.1182]
- Buchmüller, Peccei and Yanagida, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.55 (2005) 311 [hep-ph/0502169]

Boltzmann eq.についてはGUT- baryogenesisの論文

- Kolb and Wolfram, Nucl. Phys. B172 (1980) 224 [Erratum: B195 (1982) 542]
- Harvey, Kolb, Reiss and Wolfram, Nucl. Phys. B201 (1982) 16

LSP abundance (CDM)の計算

- Gondolo, Edsjö, Ullio, Bergström, Schelke and Baltz, JCAP 0407 ('04) [hep-ph/0406204]

Dark SUSY <http://www.physto.se/~edsjo/darksusy/>

ニュートリノ質量とレプトン数の破れ

標準理論のニュートリノ $\in SU(2)$ -doublet $l_{AL} = \begin{pmatrix} \nu_{AL} \\ e_{AL} \end{pmatrix} \in \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

ゲージ不変な湯川結合 + SSB で質量が生じない

ニュートリノ振動の発見により、質量は必要！

($A = e, \nu, \tau$: flavor)

gauge singlet N_R を加えて Yukawa 項を組む

$$\mathcal{L}_Y = -y_{AB} \Phi^\dagger \bar{e}_{BR} l_{AL} - h_{AB} \tilde{\Phi}^\dagger \bar{N}_{BR} l_{AL} + \text{h.c.}$$

SSB

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \in \left(2, \frac{1}{2}\right) \quad \tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$$

$$\mathcal{L}_Y \sim -y_{AB} v_0 \bar{e}_{BR} e_{AL} - h_{AB} v_0 \bar{N}_{BR} \nu_{AL} + \text{h.c.}$$

y, h は任意の $N_f \times N_f$ 複素行列

e_L と e_R , ν_L と N_R の bi-unitary transformation で y と h を対角化

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &\sim -m_A^{(e)} (\bar{e}_{AR} e_{AL} + \bar{e}_{AL} e_{AR}) - m_A^{(\nu)} (\bar{N}_{AR} \nu_{AL} + \bar{\nu}_{AL} N_{AR}) \\ &\sim -m_A^{(e)} \bar{e}_A e_A - m_A^{(\nu)} \bar{\nu}_A \nu_A\end{aligned}$$

4成分スピノール $e_A = \begin{bmatrix} e_{AL} \\ e_{AR} \end{bmatrix}$, $\nu_A = \begin{bmatrix} \nu_{AL} \\ N_{AR} \end{bmatrix}$ chiral repr. $\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dirac mass term Lepton numberは保存

不自然なくらい $m^{(e)} \gg m^{(\nu)}$ $[\sum_i m_i^{(\nu)} < 1.0\text{eV: WMAP+SDSS}]$

ゲージ不変性と矛盾せずに N_R の Majorana mass term を導入できる

$$\mathcal{L}_Y = -y_{AB} \Phi^\dagger \bar{e}_{BR} l_{AL} - h_{AB} \tilde{\Phi}^\dagger \bar{N}_{BR} l_{AL} - \frac{1}{2} M_{AB} \bar{N}_{BR} N_{AR}^c + \text{h.c.}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} (\nu_L \quad \bar{N}_R) \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad N_R^c \text{はLeft-handed}$$

$$m_D = h v_0$$

$$\text{固有値} \simeq -\frac{m_D^2}{M}, M$$

Seesaw Mechanism

レプトン数 $L(l_L) = L(e_R) = 1$

$$\mathcal{L}_Y = -y_{AB} \Phi^\dagger \underline{\bar{e}_{BR} l_{AL}} - h_{AB} \tilde{\Phi}^\dagger \bar{N}_{BR} l_{AL} - \frac{1}{2} M_{AB} \bar{N}_{BR} N_{AR}^c + \text{h.c.}$$

$L = 0$

$$L(N_R) = 1$$

$$L = 0$$

$$L = -2$$

$$L(N_R) = 0$$

$$L = 1$$

$$L = 0$$

$h \neq 0$ 且つ $M \neq 0$ \longrightarrow Lepton number violation

Leptogenesis

high-T

$$\langle \Phi \rangle (T) = 0$$

Dirac mass=0



Low-energy observables

$$\langle \Phi \rangle \neq 0$$

neutrino oscillation

Dirac mass, Majorana mass, mixing

low-energy observableとの関係

ニュートリノ振動 $\Delta m_{ij}^2, U_{MNS}$

質量固有状態: 真空 vs $T=M$

$$\mathcal{L}_Y = y_{AB} \epsilon^{ab} l_{aAL} e_{BR}^c \tilde{\Phi}_b - h_{AB} \epsilon^{ab} l_{aAL} N_{BR}^c \Phi_b - \frac{1}{2} M_{AB} N_{AR}^c N_{BR}^c + \text{h.c.}$$

2-spinor notation

Lorentz群 $[SL(2; C) \rightarrow 2\text{つの } SU(2)]$ の既約表現 (s_L, s_R)

$$\psi_\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \chi^{\dot{\alpha}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (\psi_\alpha)^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} : \text{共役} \quad \text{添字の上下は } \epsilon^{\alpha\beta}$$

$$\psi^\alpha \phi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} : \text{Lorentz scalar } (0, 0) \quad \psi \sigma^\mu \bar{\chi}, \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \psi : \text{vector } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Dirac $\psi = \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi} = [\chi^\alpha \bar{\phi}_{\dot{\alpha}}] \quad \bar{\psi}\psi = \phi\chi + \bar{\chi}\bar{\phi} = \phi\chi + \text{h.c.}$

ϕ と χ のチャージは逆

Majorana $\psi = \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi} = [\phi^\alpha \bar{\phi}_{\dot{\alpha}}] \quad \bar{\psi}\psi = \phi\phi + \bar{\phi}\bar{\phi} = \phi\phi + \text{h.c.}$

ϕ のチャージは0

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &\stackrel{\text{SSB}}{\sim} -e_L^T m_e e_R^c - \nu_L^T m_\nu N_R^c - \frac{1}{2} N_R^{cT} M N_R^c + \text{h.c.} \\ &= -e_L^T m_e e_R^c - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_L^T & N_R^{cT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_\nu \\ m_\nu^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.}\end{aligned}$$

(1) m_e と m_ν をbi-unitary変換で対角化

$$U_L^{(e)} m_e U_R^{(e)} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \quad S_L m_\nu S_R = \Lambda_D = \text{diagonal}$$

$$\text{場の変換: } e_R^c = U_R^{(e)} e_{iR}^{\prime c}, \quad e_L = U_L^{(e)T} e_{iL}', \quad N_R^c = S_R N_R^{\prime c}, \quad \nu_L = S_L^T \nu_L'$$

mass term:

$$\mathcal{L}_m = -m_{ei} e_{iL}' e_{iR}^{\prime c} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_L^{\prime T} & N_R^{\prime cT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_D \\ \Lambda_D & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L' \\ N_R^{\prime c} \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

↑
charged lepton
mass eigenstates

$$\tilde{M} = S_R^T M S_R$$

(2) ν mass matrixをブロック対角化

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_D \tilde{M}^{-1} \\ -\tilde{M}^{-1} \Lambda_D & 1 \end{pmatrix} \text{ は近似的にユニタリ } V^\dagger V = 1 + O(\Lambda_D^2 \tilde{M}^{-2})$$

$$\longrightarrow V^T \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_D \\ \Lambda_D & \tilde{M} \end{pmatrix} V \simeq \begin{pmatrix} -\Lambda_D \tilde{M}^{-1} \Lambda_D & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{pmatrix} \quad \text{‘seesaw’}$$

(3) ブロック対角部分を対角化 $-T_L^T (\Lambda_D \tilde{M}^{-1} \Lambda_D) T_L = \Lambda_l, \quad T_R^T \tilde{M} T_R = \Lambda_h$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu-m} &= -\frac{1}{2} (\nu_L'^T \ N_R'^c T) V^* \begin{pmatrix} T_L^* & 0 \\ 0 & T_R^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_l & 0 \\ 0 & \Lambda_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_L^\dagger & 0 \\ 0 & T_R^\dagger \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L' \\ N_R'^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{2} \eta_l^T \Lambda_l \eta_l + \frac{1}{2} \eta_h^T \Lambda_h \eta_h + \text{h.c.} \quad \longleftarrow \text{Majorana mass} \end{aligned}$$

$$\text{質量固有状態} \begin{cases} \eta_l = T_L^\dagger \left[\nu_L' - \Lambda_D (\tilde{M}^{-1})^\dagger N_R'^c \right] & \text{light (主成分は } \nu_L') \\ \eta_h = T_R^\dagger \left[N_R'^c + (\tilde{M}^{-1})^\dagger \Lambda_D \nu_L' \right] & \text{heavy (主成分は } N_R'^c) \end{cases}$$

charged current interaction

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CC} &\sim \frac{g_2}{2\sqrt{2}} [\bar{e}_L \bar{\sigma}^\mu \nu_L + \nu_L \sigma^\mu \bar{e}_L] W_\mu^- + \text{h.c.} \\ &\simeq \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\bar{e}'_L \bar{\sigma}^\mu (U_L^{(e)*} S_L^T T_L) \eta_l + \eta_{lL} \sigma^\mu (T_L^T S_L U_L^{(e)\dagger}) \bar{e}'_L \right] W_\mu^- + \text{h.c.}\end{aligned}$$

$$(U_{MNS})_{fi} = \left(U_L^{(e)*} S_L^T T_L \right)_{fi} \quad f = \text{lepton flavor}, i = \text{mass eigenstate}$$

3 physical phases

Majorana phaseは ν -osc.には無関係

Giunti, Phys. Lett. B686 (2010) and refs. therein

$$\begin{aligned}|\nu_e(t)\rangle &= e^{-iE_1 t} \cos \theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t} \sin \theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle &= -e^{-iE_1 t} \sin \theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t} \cos \theta |\nu_2\rangle\end{aligned}$$

$\langle \nu_e(0) | \nu_\mu(t) \rangle$ is indep. of the phase convention of $|\nu_i\rangle$

Leptogenesisに関する位相とは「直接には」関係無い。

模型（質量行列）に何らかの制限

生成されるレプトン数の評価

$T \simeq M_R \gg 100\text{GeV}$ の電弱対称相 $\left\{ \begin{array}{l} \text{gauge boson, lepton は massless} \\ \text{Higgs boson は全て同じ質量} \ll T \end{array} \right.$

(i) レプトン数非保存 $\mathcal{L}_Y = -h_{AB} \tilde{\Phi}^\dagger \bar{N}_{BR} l_{AL} - \frac{1}{2} M_{AB} \bar{N}_{BR} N_{AR}^c + \text{h.c.}$
 $h \neq 0$ and $M \neq 0$

(ii) C and CP violation M を対角化する基底で h の複素位相

$SU(2)$ symmetry $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(N_A \rightarrow e_B^- \phi^+) = \Gamma(N_A \rightarrow \nu_B \phi^0) \equiv \Gamma(N_A \rightarrow l_B \phi) \\ \Gamma(N_A \rightarrow e_B^+ \phi^-) = \Gamma(N_A \rightarrow \bar{\nu}_B \phi^{0*}) \equiv \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}_B \bar{\phi}) \end{array} \right.$

total decay asym. $\varepsilon_A \equiv \frac{\sum_B \Gamma(N_A \rightarrow l_B \phi) - \sum_B \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}_B \bar{\phi})}{\sum_B \Gamma(N_A \rightarrow l_B \phi) + \sum_B \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}_B \bar{\phi})}$

(iii)非平衡状態

N_R の分布関数が平衡分布からずれる

$T \simeq M_R$ から, 崩壊率($\Gamma \sim h^2 M_R$) $\simeq H(T)$ となる範囲

空間的に一様な現象 \longrightarrow 各粒子の分布関数 $f_i(t, \mathbf{p})$
に対するBoltzmann方程式

共動座標系で

$$\frac{dn_\psi(t)}{dt} + 3H(t)n_\psi(t) = - \sum_{i,j,\dots} [\gamma(\psi \rightarrow i + j + \dots) - \gamma(i + j + \dots \rightarrow \psi)] \\ - \sum_{a,i,j,\dots} [\gamma(\psi + a \rightarrow i + j + \dots) - \gamma(i + j + \dots \rightarrow \psi + a)]$$

$$n_\psi(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_\psi(t, \mathbf{p})$$

$\gamma(\psi \rightarrow i + j + \dots)$ は f_ψ 等を使って得られた反応率

$$\begin{aligned}
& \gamma(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots) \\
&= \int d\tilde{\mathbf{p}}_\psi d\tilde{\mathbf{p}}_a \dots d\tilde{\mathbf{p}}_j (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + \dots - p_i - p_j - \dots) \\
&\quad \times |\mathcal{M}(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots)|^2 f_\psi f_a f_b \dots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots
\end{aligned}$$

$$d\tilde{\mathbf{p}} \equiv \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p}$$

1. 平衡状態では Boltzmann 方程式の 右辺 = 0
 2. CP 対称性があると、粒子数は時間変化しない
- を示すことができる。

1. 平衡状態では

エネルギー保存より

$$1 \pm \frac{1}{e^{\beta E} \mp 1} = \frac{e^{\beta E}}{e^{\beta E} \mp 1}$$

$$\begin{aligned} f_{\psi}^{\text{eq}}(1 \pm f_i^{\text{eq}})(1 \pm f_j^{\text{eq}}) \cdots &= \frac{1}{e^{\beta E_{\psi}} \mp 1} \frac{e^{\beta E_i}}{e^{\beta E_i} \mp 1} \frac{e^{\beta E_j}}{e^{\beta E_j} \mp 1} \cdots \\ &= \frac{e^{\beta E_{\psi}}}{e^{\beta E_{\psi}} \mp 1} \frac{1}{e^{\beta E_i} \mp 1} \frac{1}{e^{\beta E_j} \mp 1} \cdots = f_i^{\text{eq}} f_j^{\text{eq}} \cdots (1 \pm f_{\psi}^{\text{eq}}) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} &\gamma(\psi \rightarrow i + j + \cdots) - \gamma(i + j + \cdots \rightarrow \psi) \\ &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_{\psi} d\tilde{\mathbf{p}}_i \cdots (2\pi)^4 \delta^4(p_{\psi} - p_i - p_j - \cdots) \underbrace{f_{\psi}^{\text{eq}}(1 \pm f_i^{\text{eq}})(1 \pm f_j^{\text{eq}}) \cdots}_{\text{unitarity}} \\ &\quad \times \left[\underbrace{|\mathcal{M}(\psi \rightarrow i + j + \cdots)|^2}_{\text{unitarity}} - |\mathcal{M}(i + j + \cdots \rightarrow \psi)|^2 \right] \end{aligned}$$

unitarity $\rightarrow 0$

Kolb and Wolfram, Nucl. Phys. B172, Appendix

2. CP対称性があるとき

$$f_\psi(t) = f_{\bar{\psi}}(t), \mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{M}(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta})$$

$n_\psi - n_{\bar{\psi}}$ に対するBoltzmann方程式の右辺に現れる量:

$$\begin{aligned} & [\gamma(\psi \rightarrow i + j + \dots) - \gamma(i + j + \dots \rightarrow \psi)] - [\gamma(\bar{\psi} \rightarrow \bar{i} + \bar{j} + \dots) - \gamma(\bar{i} + \bar{j} + \dots \rightarrow \bar{\psi})] \\ &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_\psi \dots (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi - p_i - p_j - \dots) \\ & \quad \times \left\{ \left[|\mathcal{M}(\psi \rightarrow i + j + \dots)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{\psi} \rightarrow \bar{i} + \bar{j} + \dots)|^2 \right] f_\psi (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots \right. \\ & \quad \left. - \left[|\mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow \psi)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{i} + \bar{j} + \dots \rightarrow \bar{\psi})|^2 \right] f_i f_j \dots (1 \pm f_\psi) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Boltzmann方程式の解法

分布関数 $f(t, \mathbf{p})$ に対する方程式 \rightarrow 粒子数密度 $n(t)$ に対する方程式

$$f(t, \mathbf{p}) = \frac{n(t)}{n^{\text{eq}}} f^{\text{eq}}(\mathbf{p})$$

#(弾性散乱) \gg #(非弾性散乱) ?

この近似の妥当性については後述

‘integrated Boltzmann equation’

$$\dot{n}_\psi(t) + 3H(t)n(t)$$

$$= - \sum_{i,j,\dots} \left[\frac{n_\psi}{n_\psi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\psi \rightarrow i + j + \dots) - \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{\text{eq}} n_j^{\text{eq}} \dots} \gamma^{\text{eq}}(i + j + \dots \rightarrow \psi) \right]$$
$$- \sum_{a,i,\dots} \left[\frac{n_\psi n_a}{n_\psi^{\text{eq}} n_a^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\psi + a \rightarrow i + j + \dots) - \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{\text{eq}} n_j^{\text{eq}} \dots} \gamma^{\text{eq}}(i + j + \dots \rightarrow \psi + a) \right]$$

$\gamma^{\text{eq}}(\dots) =$ 平衡分布 $f^{\text{eq}}(\mathbf{p})$ で計算した $\gamma(\dots)$

変数変換

$Y_\psi \equiv \frac{n_\psi}{s}$ により空間膨張の効果を消す

$$\dot{n}_\psi(t) + 3H(t)n_\psi(t) = s\dot{Y}_\psi(t)$$

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \text{ より } \dot{s} = \frac{3}{T} \frac{dT}{dt} s = 3s \frac{d \log T}{dt}$$

t と T の関係 $a(t) \propto t^{1/2} \propto T^{-1}$ \longrightarrow $\frac{d \log T}{dt} = -\frac{1}{2t}$
[放射優勢宇宙] $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{2t}$

これらから $\dot{s} = -3sH(t)$

$$\therefore \dot{n}_\psi = s\dot{Y}_\psi + \dot{s}Y_\psi = s\dot{Y}_\psi - 3H(t)sY_\psi$$

$t \rightarrow z = \frac{M}{T}$: 無次元変数

$M =$ the smallest N_R mass
最後に崩壊

t の増加 $\leftrightarrow T$ の減少 $\leftrightarrow z$ の増加

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= -\frac{M}{T^2} \frac{dT}{dt} \frac{d}{dz} = -z \frac{d \log T}{dt} \frac{d}{dz} = H(t) z \frac{d}{dz} = \left(\frac{4\pi^3}{45} g_* \right)^{1/2} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}} z \frac{d}{dz} \\ &= \left(\frac{4\pi^3}{45} g_* \right)^{1/2} \frac{M^2}{m_{\text{Pl}}} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \end{aligned}$$

これにより

$$\begin{aligned} s \frac{dY_\psi}{dt} &= \left(\frac{4\pi^3}{45} g_* \right)^{1/2} \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 \frac{M^2}{m_{\text{Pl}}} \frac{1}{z} \frac{dY_\psi}{dz} = \left(\frac{2\pi^2}{45} g_* \right)^{3/2} \sqrt{2\pi} \frac{M^5}{m_{\text{Pl}}} \frac{1}{z^4} \frac{dY_\psi}{dz} \\ &\equiv C M^4 \frac{1}{z^4} \frac{dY_\psi}{dz} \end{aligned}$$

$$C = \sqrt{2\pi} \left(\frac{2\pi^2}{45} g_* \right)^{3/2} \frac{M}{m_{\text{P}}} : \text{無次元定数}$$

integrated Boltzmann equation

$$\begin{aligned}
 & C \frac{M^4}{z^4} \frac{dY_\psi}{dz} \\
 &= - \sum_{i,j,\dots} \left[\frac{Y_\psi}{Y_\psi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\psi \rightarrow i + j + \dots) - \frac{Y_i Y_j \dots}{Y_i^{\text{eq}} Y_j^{\text{eq}} \dots} \gamma^{\text{eq}}(i + j + \dots \rightarrow \psi) \right] \\
 &\quad - \sum_{a,i,\dots} \left[\frac{Y_\psi Y_a}{Y_\psi^{\text{eq}} Y_a^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\psi + a \rightarrow i + j + \dots) - \frac{Y_i Y_j \dots}{Y_i^{\text{eq}} Y_j^{\text{eq}} \dots} \gamma^{\text{eq}}(i + j + \dots \rightarrow \psi + a) \right]
 \end{aligned}$$

leptogenesisでは

$(\psi, a, i, j) = (N_A, l, \bar{l}, \phi, \bar{\phi})$ として連立Boltzmann方程式を解く

平衡状態での粒子数密度

$$T \gg m_\phi, m_l = 0$$

$$n_l^{\text{eq}} = n_{\bar{l}}^{\text{eq}} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{3}{4} \times 3_{\text{gen}} \times 2_{\text{isospin}} \right) T^3, \quad n_\phi^{\text{eq}} = n_{\bar{\phi}}^{\text{eq}} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \cdot 2 \cdot T^3$$

N_R は脱結合の効果を見るので質量を入れて

$$f_N^{\text{eq}}(\mathbf{p}) \simeq e^{-E_p/T}$$

$$\begin{aligned} n_N^{\text{eq}} &= 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}/T} = 2 \cdot \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 e^{-\sqrt{x^2 + z^2}} \\ &= 2 \cdot \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_2(z) \end{aligned}$$

$$z = M/T$$

$K_2(z)$: modified Bessel function

$$C \frac{M^4}{z^4} \frac{dY_{N_A}}{dz} = -\frac{Y_{N_A}}{Y_{N_A}^{\text{eq}}} [\gamma^{\text{eq}}(N_A \rightarrow l\phi) + \gamma^{\text{eq}}(N_A \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})] \\ + \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\text{eq}} Y_\phi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow N_A) + \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\text{eq}} Y_{\bar{\phi}}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N_A)$$

$$C \frac{M^4}{z^4} \frac{dY_l}{dz} = \frac{Y_{N_A}}{Y_{N_A}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(N_A \rightarrow l\phi) - \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\text{eq}} Y_\phi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow N_A) \\ + \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\text{eq}} Y_{\bar{\phi}}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow l\phi) - \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\text{eq}} Y_\phi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})$$

$$C \frac{M_i^4}{z^4} \frac{dY_{\bar{l}}}{dz} = \frac{Y_{N_A}}{Y_{N_A}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(N_A \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) - \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\text{eq}} Y_{\bar{\phi}}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N_A) \\ - \frac{Y_{\bar{l}} Y_{\bar{\phi}}}{Y_{\bar{l}}^{\text{eq}} Y_{\bar{\phi}}^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow l\phi) + \frac{Y_l Y_\phi}{Y_l^{\text{eq}} Y_\phi^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})$$

$Y_\phi, Y_{\bar{\phi}}$ についても同様

γ^{eq} の計算 [$f^{\text{eq}} \simeq e^{-E/T}$, $1 \pm f^{\text{eq}} \simeq 1$]

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{eq}}(N \rightarrow l\phi) &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdots f_N^{\text{eq}}(\mathbf{p}_1) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) |\mathcal{M}(N \rightarrow l\phi)|^2 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} e^{-E_1/T} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) |\mathcal{M}(N \rightarrow l\phi)|^2 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} e^{-E_1/T} 2M \Gamma_{rs}(N \rightarrow l\phi) \quad \text{decay width in the rest frame of } N \end{aligned}$$

ここで p_1 積分は

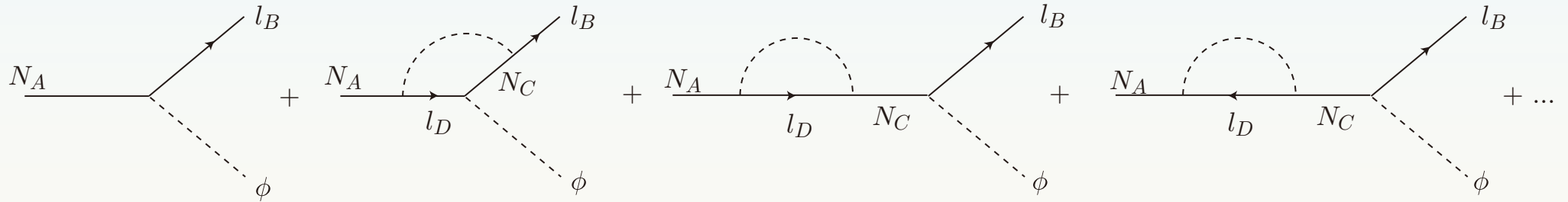
$$\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_1} e^{-\sqrt{p_1^2 + M^2}/T} = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} e^{-\sqrt{p^2 + M^2}/T} = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z)$$

CPT-inv.

$$\gamma^{\text{eq}}(N \rightarrow l\phi) = \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N) = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z) \Gamma_{rs}(N \rightarrow l\phi)$$

$$\gamma^{\text{eq}}(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) = \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow N) = \frac{T^3}{2\pi^2} z^2 K_1(z) \Gamma_{rs}(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})$$

$$i\mathcal{M}(N_A \rightarrow l_B \phi) = \begin{array}{c} N_A \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p_2 \\ \nearrow \\ l_B \\ p_3 \\ \searrow \\ \phi \end{array}$$



total decay width CP-evenなので、tree-level contribution

$$\begin{aligned} & \sum_B \left[\Gamma(N_A \rightarrow l_B \phi) + \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}_B \bar{\phi}) \right] \\ &= \frac{2}{2M_A} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} 2(hh^\dagger)_{ii} (p_1 \cdot p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \\ &= \frac{1}{8\pi} (hh^\dagger)_{AA} M_A \end{aligned}$$

$$\sum_B [\Gamma(N_A \rightarrow l_B \phi) - \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}_B \bar{\phi})] = \frac{M_A}{(8\pi)^2} \sum_{B \neq A} \text{Im} \left[((hh^\dagger)_{BA})^2 \right] [f(\xi_B) + g(\xi_B)]$$

$$\xi_B \equiv \frac{M_B^2}{M_A^2} \quad f(\xi) = \sqrt{\xi} \left[1 - (1 + \xi) \log \frac{1 + \xi}{\xi} \right], \quad g(\xi) = \frac{\sqrt{\xi}}{1 - \xi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(N_A \rightarrow l\phi) = \frac{1 + \varepsilon_A}{2} \Gamma = \frac{(hh^\dagger)_{AA}}{16\pi} (1 + \varepsilon_A) M_A \\ \Gamma(N_A \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) = \frac{1 - \varepsilon_A}{2} \Gamma = \frac{(hh^\dagger)_{AA}}{16\pi} (1 - \varepsilon_A) M_A \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_A = \frac{1}{8\pi (hh^\dagger)_{AA}} \sum_{B \neq A} \text{Im} \left[((hh^\dagger)_{BA})^2 \right] [f(\xi_B) + g(\xi_B)]$$

具体的なamplitudesの計算については、

<http://astr.phys.saga-u.ac.jp/~funakubo>

「研究関連」のセミナーのプレゼンファイル

埼玉大での講義「スファレロン過程とレプトン数生成」を参照

on-shell scattering termの取り扱い

Boltzmann eq. for lepton asymmetry

$$\frac{CM^4}{z^4} \frac{dY_L(z)}{dz} = \frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} \left(\gamma^{\text{eq}}(N \rightarrow l\phi) - \gamma^{\text{eq}}(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) \right)$$

$$- \frac{Y_l}{Y_l^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow N) + \frac{Y_{\bar{l}}}{Y_l^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N) \quad \text{inverse decay}$$

$$- 2 \frac{Y_l}{Y_l^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) + 2 \frac{Y_{\bar{l}}}{Y_l^{\text{eq}}} \gamma^{\text{eq}}(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow l\phi) \quad \text{scatter}$$

decay + inverse decay

$$\int d\tilde{\mathbf{p}}_N d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_l - p_\phi)$$

$$\times \left[\frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} e^{-E_N/T} (|M(N \rightarrow l\phi)|^2 - |M(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})|^2) \right.$$

$$\left. - \frac{Y_l}{Y_l^{\text{eq}}} e^{-(E_l+E_\phi)/T} |M(l\phi \rightarrow N)|^2 + \frac{Y_{\bar{l}}}{Y_l^{\text{eq}}} e^{-(E_l+E_\phi)/T} |M(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N)|^2 \right]$$

to the 1st order of the CP violation

$$|M(N \rightarrow l\phi)|^2 = |M(\bar{l}\bar{\phi} \rightarrow N)|^2 = \frac{1 + \varepsilon}{2} |A_D|^2$$

$$|M(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})|^2 = |M(l\phi \rightarrow N)|^2 = \frac{1 - \varepsilon}{2} |A_D|^2$$

$$Y_l - Y_{\bar{l}} \equiv Y_L, \quad Y_l + Y_{\bar{l}} = 2Y_l^{\text{eq}}$$

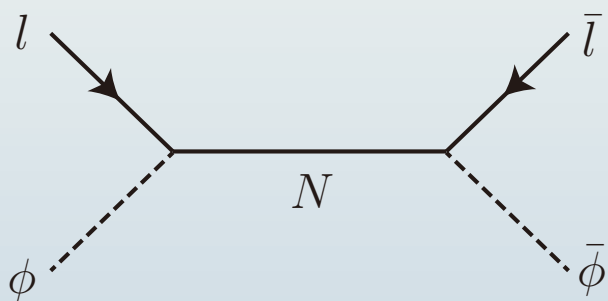
decay + inverse decay

$$\left[\varepsilon \frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \frac{Y_L}{Y_l^{\text{eq}}} \right) \right] \int d\tilde{\mathbf{p}}_N d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_l - p_\phi) |A_D|^2 e^{-E_N/T}$$

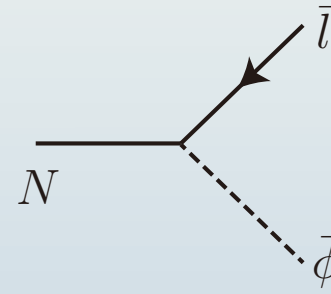
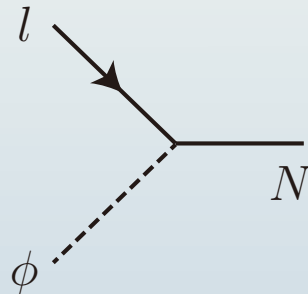
washout

$Y_N = Y_N^{\text{eq}}$ でも Leptogenesis

散乱項で引き算されるon-shellの寄与を考慮する



から



を引いておく

$$\gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) \longrightarrow \gamma^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) - \gamma_{\text{os}}^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})$$

ここでon-shell項は、

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{os}}^{\text{eq}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi}) &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{l}} d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{\phi}} (2\pi)^4 \delta^4(p_l + p_\phi - p_{\bar{l}} - p_{\bar{\phi}}) |M_{\text{os}}(l\phi \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})|^2 e^{-(E_l + E_\phi)/T} \\ &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{l}} d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{\phi}} (2\pi)^4 \delta^4(p_l + p_\phi - p_{\bar{l}} - p_{\bar{\phi}}) e^{-(E_l + E_\phi)/T} \\ &\quad \times |M(l\phi \rightarrow N)|^2 \frac{\pi \delta(s - M^2)}{M\Gamma} |M(N \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})|^2 \\ &= \int d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi d^4 p_N e^{-E_N/T} \delta^4(p_N - p_l - p_\phi) \int d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{l}} d\tilde{\mathbf{p}}_{\bar{\phi}} (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_{\bar{l}} - p_{\bar{\phi}}) \\ &\quad \times \left(\frac{1 - \varepsilon}{2}\right)^2 |A_D|^2 \frac{\pi \delta(p_N^2 - M^2)}{M\Gamma} \times |A_D|^2 \\ &= \left(\frac{1 - \varepsilon}{2}\right)^2 \int d\tilde{\mathbf{p}}_N d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_l - p_\phi) |A_D|^2 e^{-E_N/T} \end{aligned}$$

$$= 2M\Gamma$$

decay + inverse decay + onshell scattering

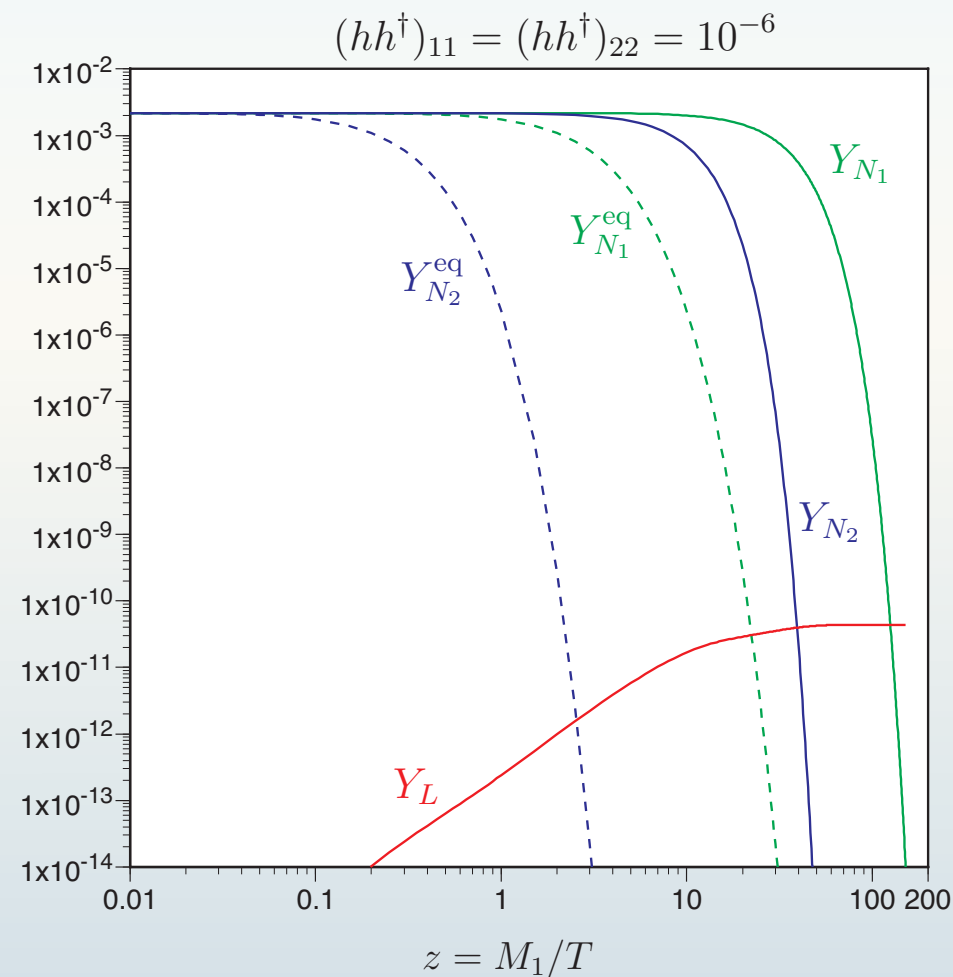
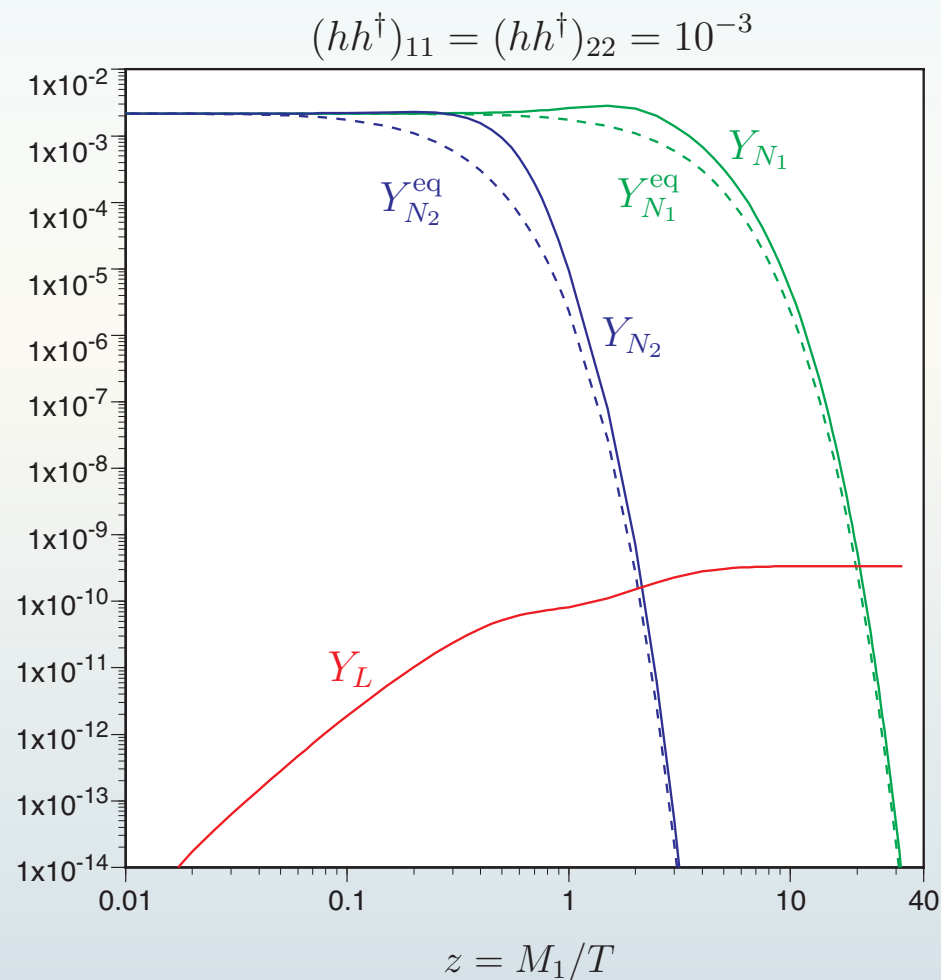
$$\left[\varepsilon \frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \frac{Y_L}{Y_l^{\text{eq}}} \right) - 2\varepsilon \right] \int d\tilde{\mathbf{p}}_N d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_l - p_\phi) |A_D|^2 e^{-E_N/T}$$
$$= \left[\varepsilon \left(\frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{Y_L}{Y_l^{\text{eq}}} \right] \int d\tilde{\mathbf{p}}_N d\tilde{\mathbf{p}}_l d\tilde{\mathbf{p}}_\phi (2\pi)^4 \delta^4(p_N - p_l - p_\phi) |A_D|^2 e^{-E_N/T}$$

Kolb and Wolfram, Nucl. Phys. B172 (1980) Sec.2.3

数値解の例

2-flavor toy model $M_1 = 10^{-6} m_{\text{Pl}}$, $M_2/M_1 = 10$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-8}$

初期条件 $Y_N = Y_N^{\text{eq}}$, $Y_l = Y_{\bar{l}} = Y_l^{\text{eq}}$, $Y_\phi = Y_{\bar{\phi}} = Y_\phi^{\text{eq}}$ at $z = M_1/T = 0.01$



解の定性的な振舞

$T \simeq M_1$ では $Y_l = Y_l^{\text{eq}}, Y_\phi = Y_\phi^{\text{eq}}, \dots$

$M_1 \ll M_2$ の場合、生成されるLepton数は N_1 の崩壊で決まり

$$\frac{dY_{N_1}}{dz} = -(D + S) (Y_{N_1} - Y_{N_1}^{\text{eq}})$$

D : decay

S : scattering

$$\frac{dY_{B-L}}{dz} = -\epsilon_1 D (Y_{N_1} - Y_{N_1}^{\text{eq}}) - W Y_{B-L}$$

W : wash-out

解析的な近似解

Buchmüller, Di Bari and Plümacher, Ann. Phys. 315

decay parameter

$$K \equiv \frac{\Gamma_D}{H(z=1)}$$

$K \gg 1$ strong washout regime

Y は Y^{eq} に近い発展をして、最終的な $B - L$ は W が効かなくなった時期に決まる。

$K < 1$ weak washout regime

Y は Y^{eq} から遅れて変化し、最終的な $B - L$ は初期条件などの詳細に依存する。

decay + inverse decay + onshell scattering

$$\frac{dY_N(z)}{dz} = -K \frac{zK_1(z)}{K_2(z)} (Y_N(z) - Y_N^{\text{eq}}(z))$$

$$\frac{dY_L(z)}{dz} = K \left[\underbrace{\varepsilon(Y_N - Y_N^{\text{eq}}) \frac{zK_1(z)}{K_2(z)}}_{\text{washout}} - \frac{Y_L(z)}{4} \left(\frac{C_s \pi^2}{2} \frac{\sqrt{2} z K_1(\sqrt{2} z)}{K_2(z)} Y_N(z) + z^3 K_1(z) \right) \right]$$

washout

$$Y_N^{\text{eq}}(z) = \frac{z^2 K_2(z)}{C_s \pi^2}, \quad Y_l^{\text{eq}} = \frac{2}{C_s \pi^2} \quad (s = C_s T^3)$$

$Y_N(z) > Y_N^{\text{eq}}(z) \longrightarrow Y_L$ を増加

$Y_N(z) < Y_N^{\text{eq}}(z) \longrightarrow Y_L$ を減少

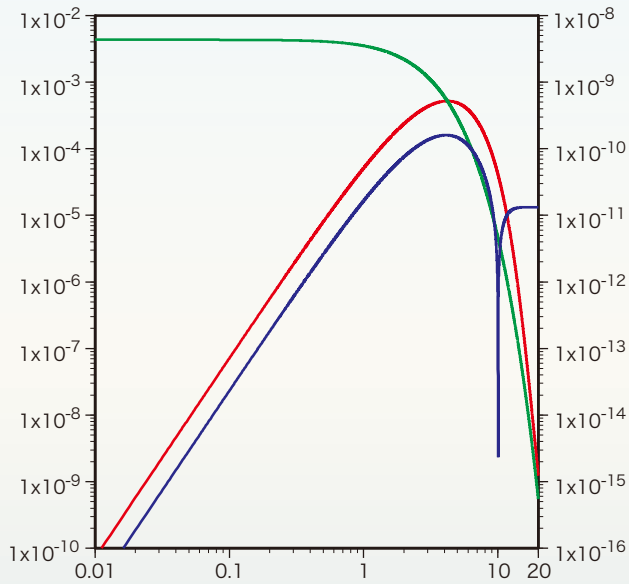
$z \rightarrow \infty \longrightarrow \frac{K_1(z)}{K_2(z)}, K_1(z) \rightarrow 0 \quad Y_L$ は凍結

統計因子の積分
粒子密度が減少し
反応が進まなくなる

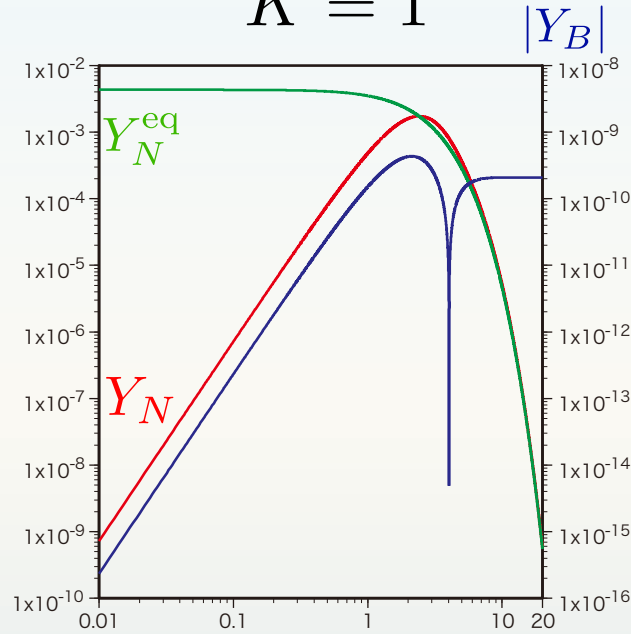
$z_0 = 10^{-3}$ で、 $Y_N(z_0) = Y_L(z_0) = 0$ でスタート

decay asymmetry: $\varepsilon = 10^{-6}$

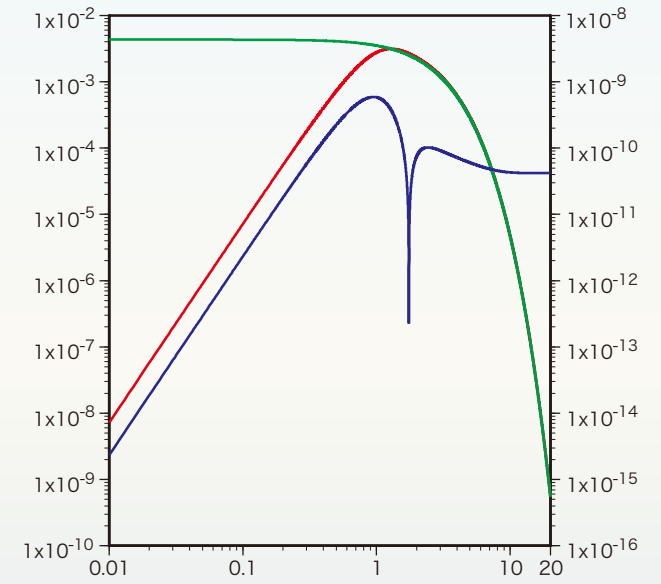
$K = 0.1$



$K = 1$



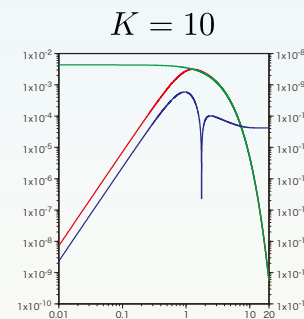
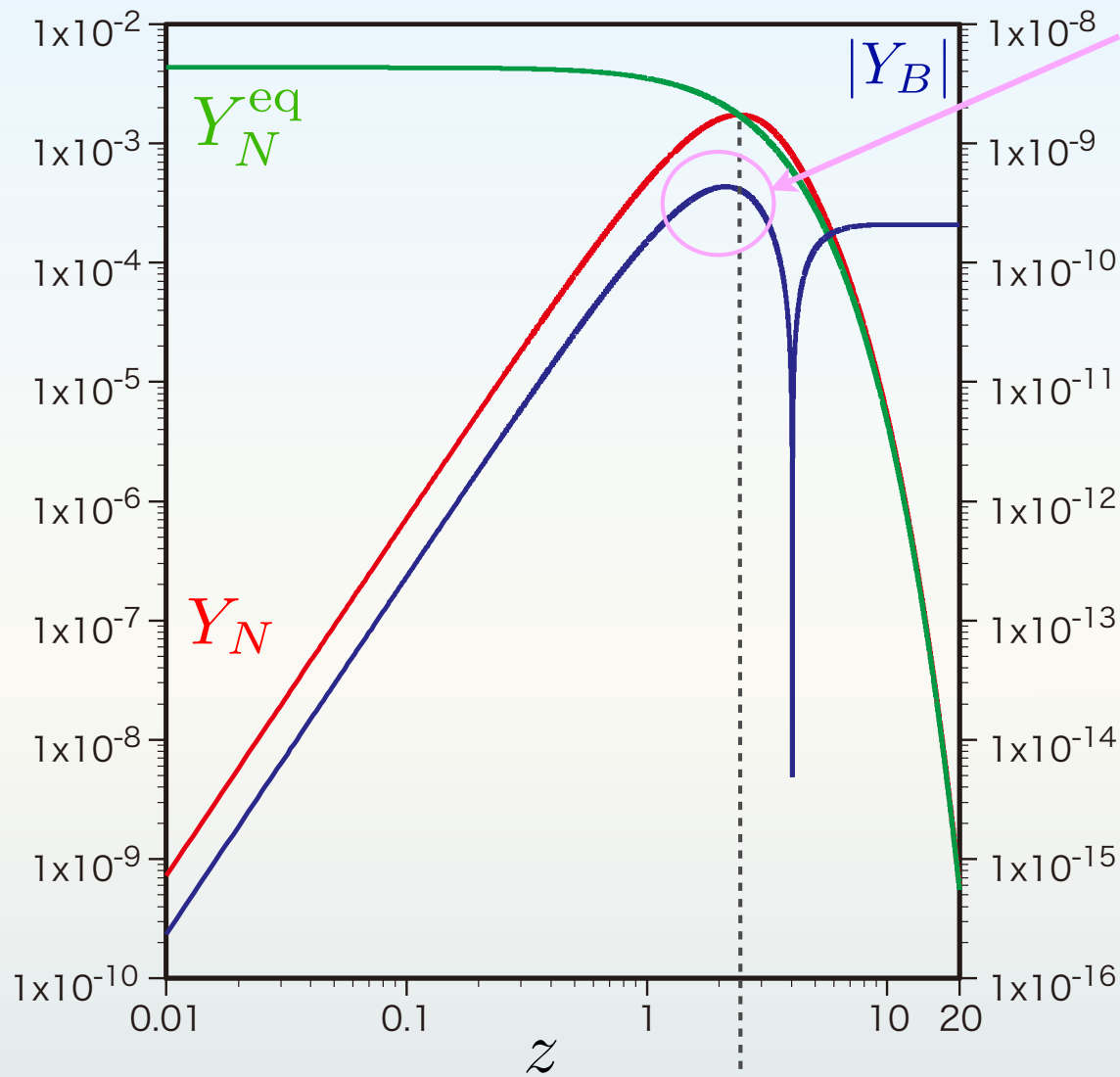
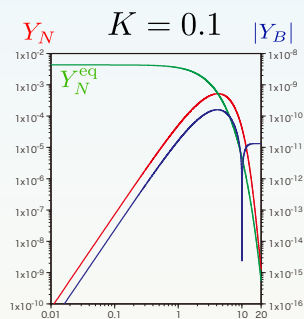
$K = 10$



$$K = \frac{\Gamma}{H(z=1)} = \frac{(hh^\dagger)_{11} M / 8\pi}{1.66 \sqrt{g_*} M^2 / m_{\text{Pl}}} = \frac{(hh^\dagger)_{11}}{41.7 \sqrt{g_*}} \frac{m_{\text{Pl}}}{M}$$

$$K = 1$$

Y_N のpeakより手前で
少し減るのは
washoutの寄与

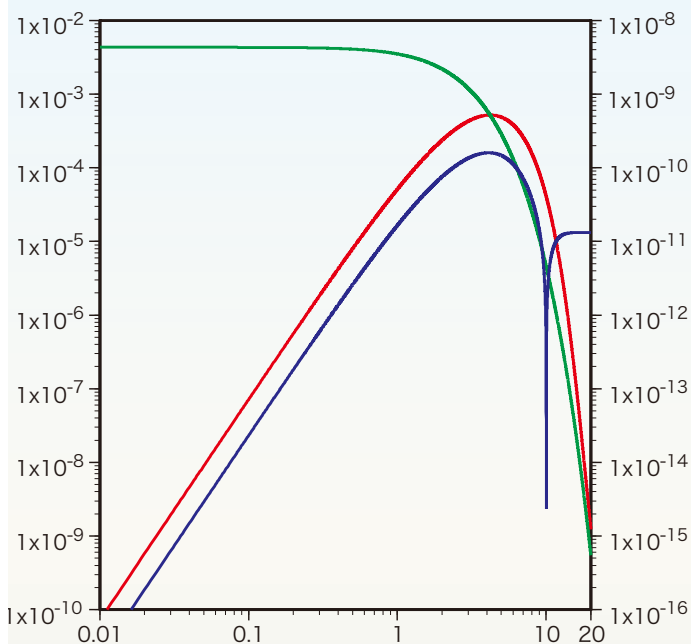


inverse decayが効いて
負のLが生成

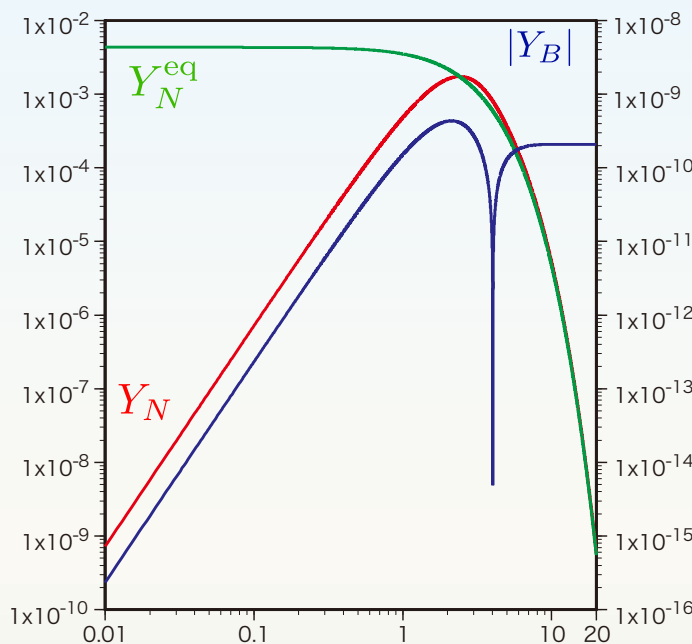


decayにより
正のLが生成

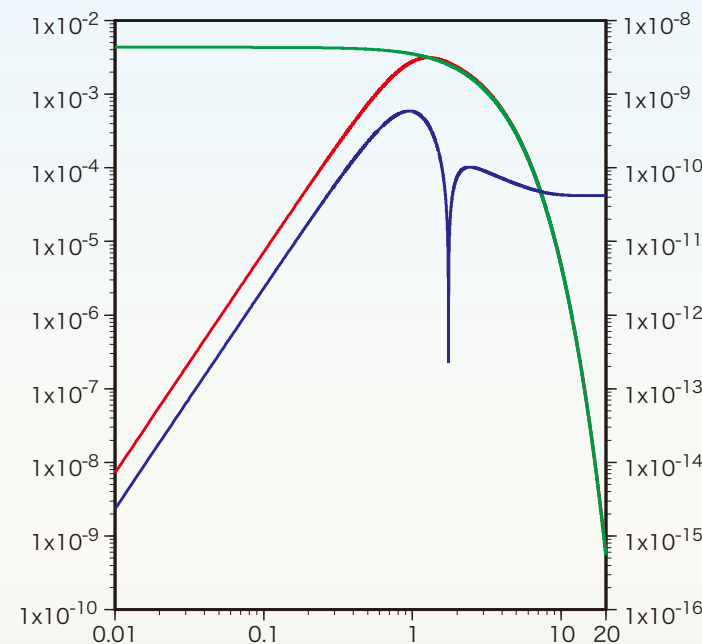
$K = 0.1$



$K = 1$



$K = 10$



K が小： Y_N が平衡値に追いつくのが遅れる
レプトン数が正に転じるのも遅れる

Full Boltzmann equation

heavy neutrinoが平衡状態から逸脱することが本質的

$$f_N(t, p_N) = \frac{n_N(t)}{n_N^{\text{eq}}} f^{\text{eq}}(p_N) \quad \text{という仮定は許されるか?}$$

$f_l(t, p_l), f_{\bar{l}}(t, p_l)$ gauge int.等のためkinetic equilibrium

$$f_l(t, p_l) \simeq \frac{1}{e^{(E_l - \mu(t))/T} - 1} \quad f_{\bar{l}}(t, p_l) \simeq \frac{1}{e^{(E_l + \mu(t))/T} - 1}$$

近年、この問題に関する論文が発表

● Basboll and Hannestad, JCAP 0701-003 [hep-ph/0609025]

● Garayoa, et al., JCAP 0909-035 [hep-ph/0905.4834]

● Hahn-Woernle, Plumacher, Wong, JCAP 0908-028 [hep-ph/0907.0205]

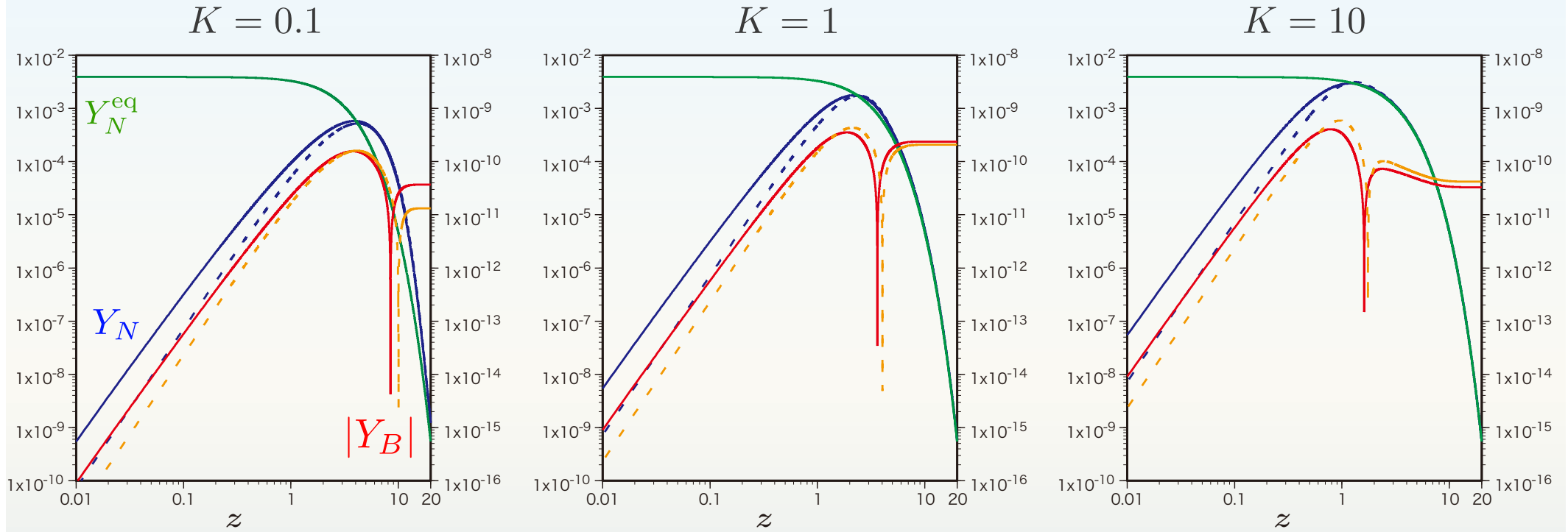
decay + inverse decay + onshell scattering, 1 generation of N

$$\frac{\partial f_N(z, y_N)}{\partial z} = \frac{K z^2}{\bar{E}_N y_N} \int_{\frac{\bar{E}_N - y_N}{2}}^{\frac{\bar{E}_N + y_N}{2}} dy_\phi \left[f_\phi^{\text{eq}}(y_\phi) f_l^{\text{eq}}(\bar{E}_N - y_\phi) (1 - f_N(y_N)) \right. \\ \left. - f_N(y_N) (1 + f_\phi^{\text{eq}}(y_\phi)) (1 - f_l^{\text{eq}}(\bar{E}_N - y_\phi)) \right]$$

$$\frac{\partial f_L(z, y_L)}{\partial z} = \frac{K z^2}{y_L^2} \int_{y_L + \frac{z^2}{y_L}}^{\infty} d\bar{E}_N \left\{ \varepsilon \left[(1 - f_l^{\text{eq}}(y_L)) (1 + f_\phi^{\text{eq}}(y_\phi)) - f_l^{\text{eq}}(y_L) f_\phi^{\text{eq}}(y_\phi) \right] \right. \\ \left. \times (f_N(y_N) - f_N^{\text{eq}}(y_N)) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} f_L(z, y_L) (f_N(y_N) + f_\phi^{\text{eq}}(y_\phi)) \right\}_{y_\phi = \bar{E}_N - y_L}$$

$$y_a = p_a/T, \quad \bar{E}_N = E_N/T$$

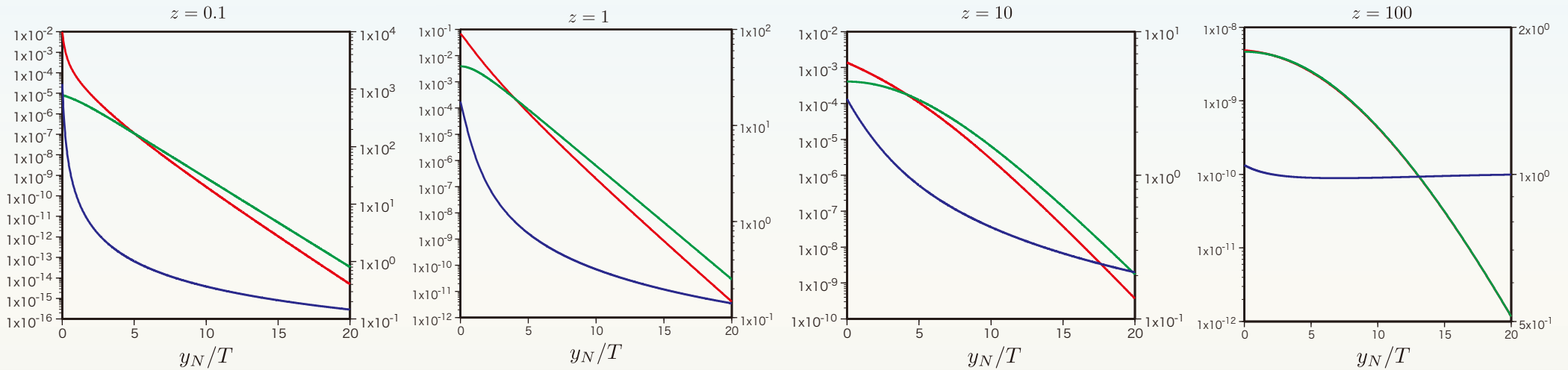
full vs integrated Boltzmann equations



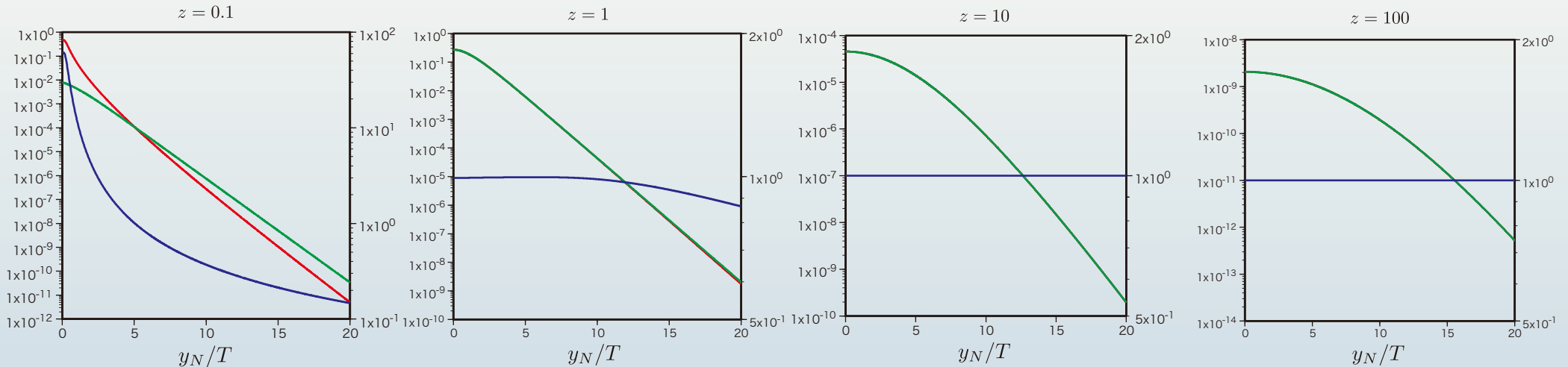
momentum dependence of the distribution functions

$$f_N(y_N) \quad \frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} f_N^{\text{eq}} \quad f_N(y_N) / \frac{Y_N}{Y_N^{\text{eq}}} f_N^{\text{eq}}$$

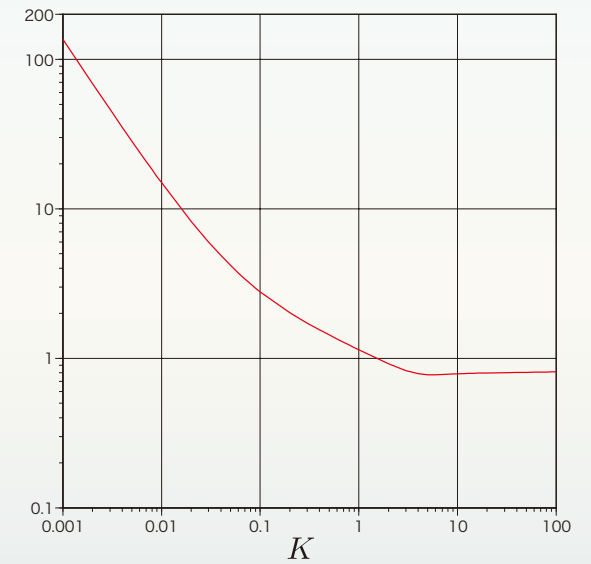
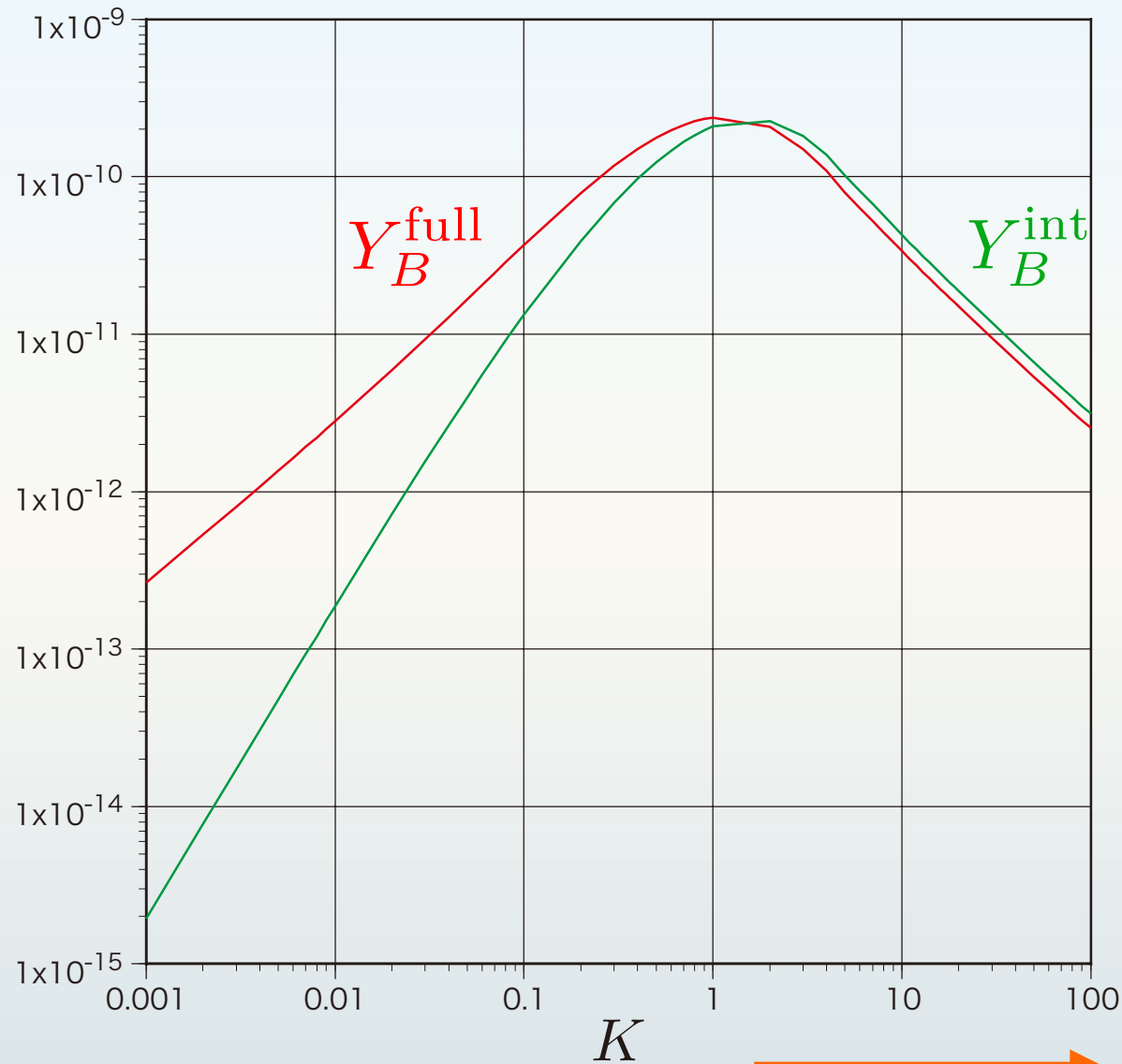
$K = 0.1$



$K = 100$

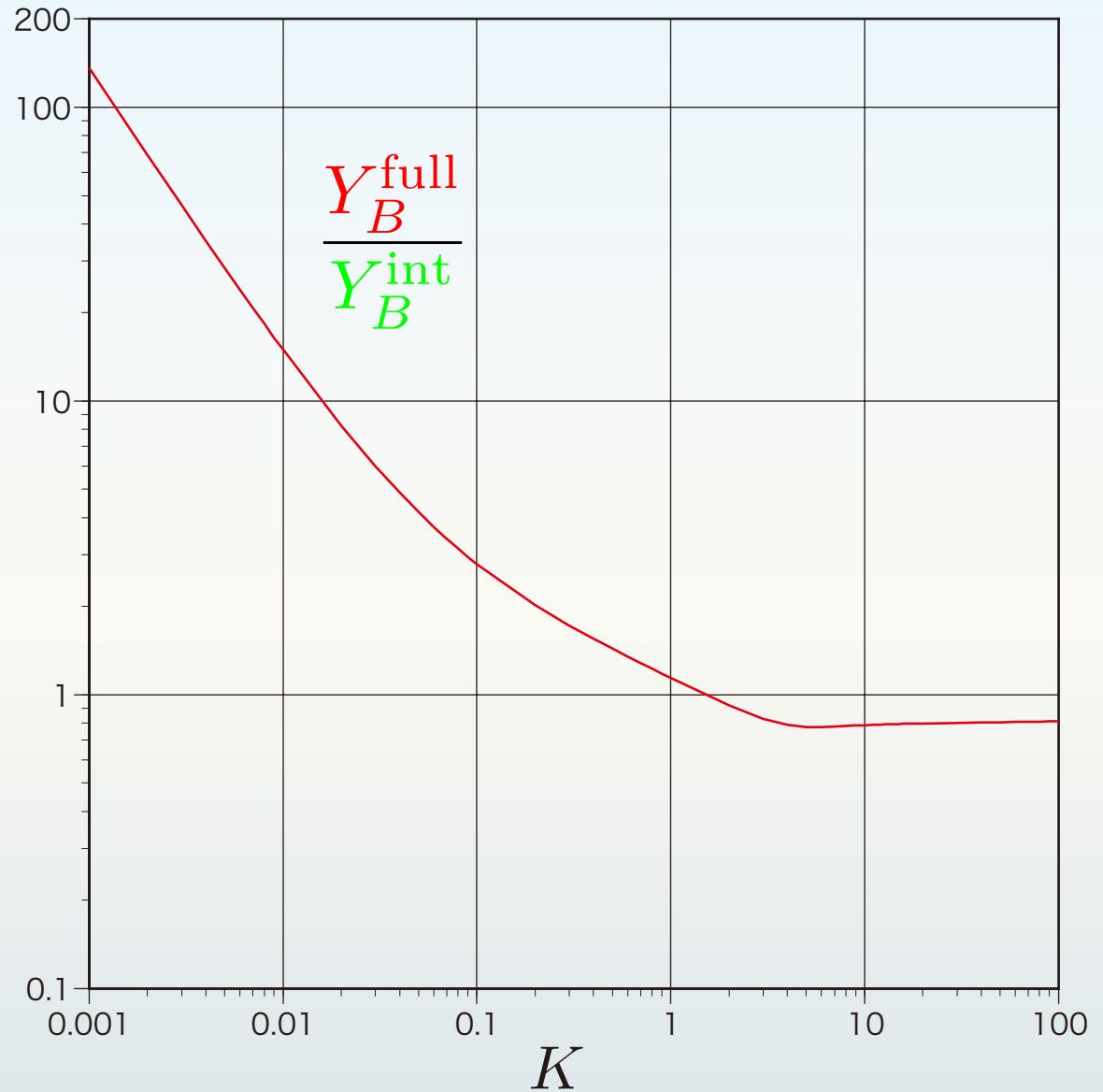
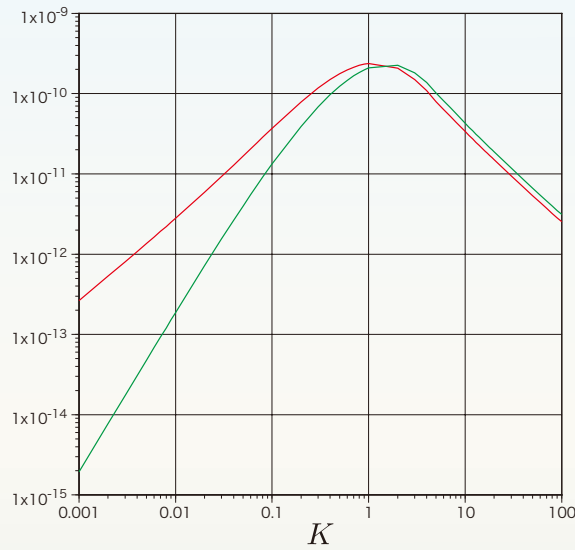


生成されるバリオン数の K 依存性



The 'washout' is dominant.

生成されるバリオン数の K 依存性



integrated BEは、非平衡現象を過小評価

まあ、当然ですけど

レプトン数非保存とスファレロン過程

両方の過程が化学平衡 $\longrightarrow B = L = 0$

$\Delta L \neq 0$ 相互作用への制限

Zee model

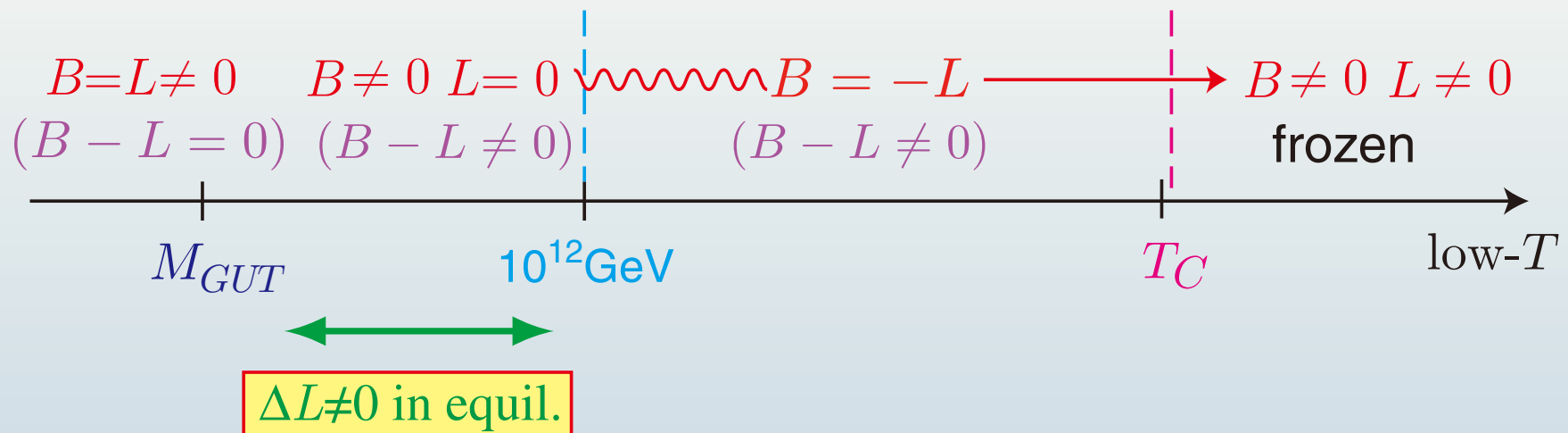
Hasegawa, Lim, Ogure, Phys. Rev. D68 ('03)

Seesaw model

Hasegawa, Phys. Rev. D69 ('04)

$(B - L)$ を保存するGUTsと組み合わせて $B \neq 0$ を残す

Fukugita and Yanagida, Phys. Rev. Lett. 89 ('02)

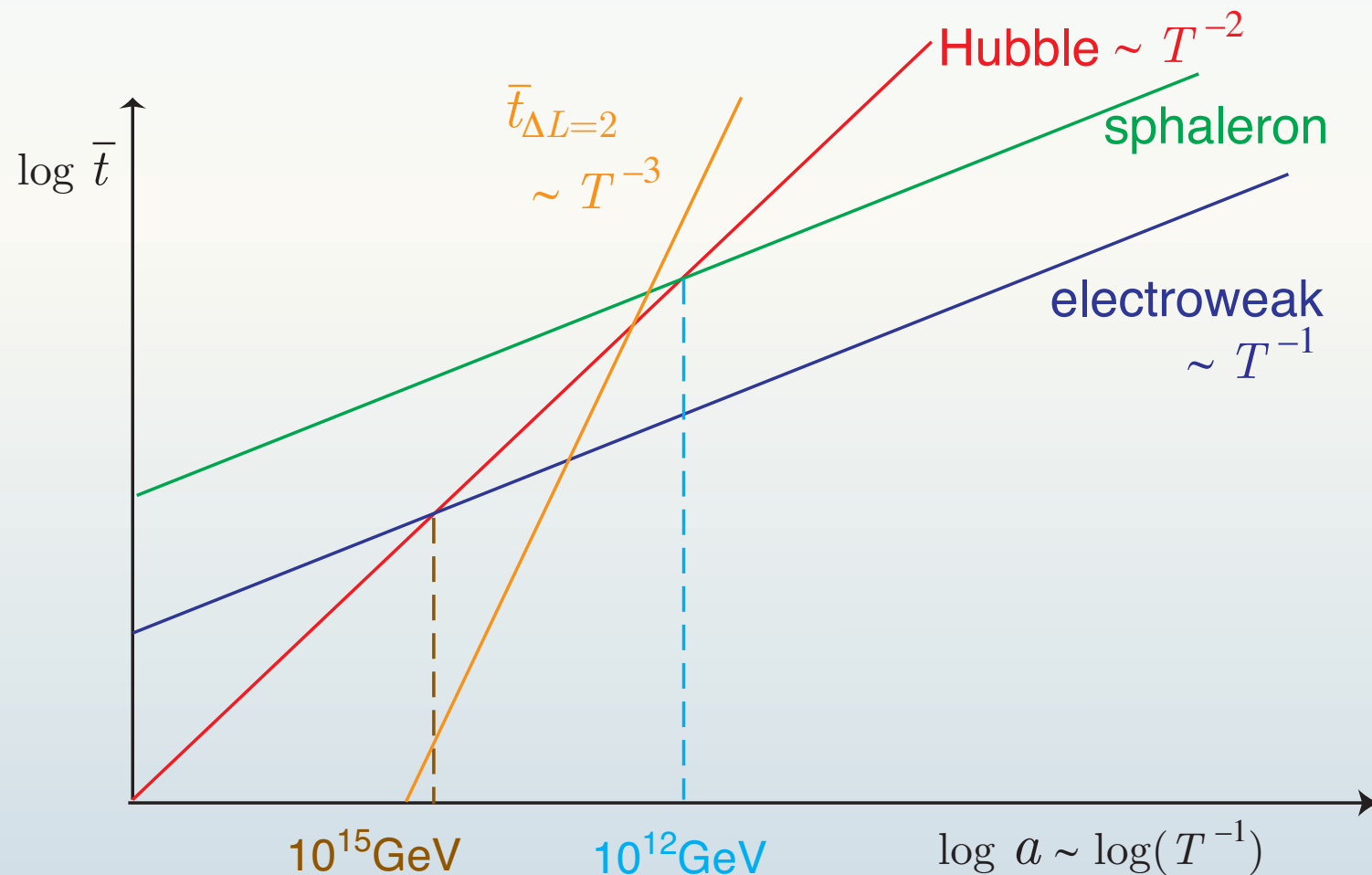


このシナリオが成功するには、

$T = 10^{12} \text{ GeV}$ に冷える前に $\Delta L \neq 0$ 過程が脱結合しなければならない。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{g_i^2}{m_{N_i}} l_i \phi l_i \phi \implies \Gamma_{\Delta L=2} \simeq \frac{0.12 g_i^4 T^3}{4\pi m_{N_i}^2} < H(T) \quad \text{at } T < 10^{12} \text{ GeV} \text{ を要請}$$

→ m_{N_i} の下限 $\overset{\text{seesaw}}{\longleftrightarrow} m_{\nu_i} < 0.8 \text{ eV}$



まとめと展望

素粒子論的宇宙論の三大ミステリー

バリオン数非対称性

ダークマター

ダークエネルギー

宇宙論的観測で
存在量が**定量的**に確定

精度は年々向上

どれを説明するにも

Beyond the SMが必要

new physicsのhintであり constraintでもある

Electroweak Baryogenesis

Higgsの物理

CP violation \notin KM phase

Leptogenesis

Neutrino振動

Seesaw模型

これから実験・観測による**新発見**、**精度向上**が期待できる

theoretical issues

有限温度の場の理論

相転移のダイナミクス

非平衡系の取り扱い

...

まだまだ手付かずの問題があります

若い人は是非、チャレンジして下さい

ご清聴、ありがとうございました。